27707

KNJIGOVEŽNICA I VELIKO SKLADIŠTE
SVIH OPĆINSKIH TISKANICA
IGNJAT ARNOLD
= VINKOVCI =
SRPSKA ULICA 2.

J. Žvanović.

uč. III. a) r. g.

Vinkovci.

VIŠNJA

33:2217/5
15
10

NAUK O PROSTORU

ZA SREDNJE ŠKOLE

NIŽI STEPEN

PRIREDIO

Dr. FRAN MIHLETIĆ,
RAVNATELJ KR. POMORSKE AKADEMIJE

DRUGO NEPROMIJENJENO IZDANJE

CIJENA 15 Din.

U ZAGREBU 1922.
TROŠKOM I NAKLADOM POKRAJINSKE UPRAVE ZA HRVATSKU I SLAVONIJU.

Ova se knjiga ne smije skuplje prodavati nego za cijenu naznačenu na prednjoj strani.

KR. ZEMALJSKA TISKARA U ZAGREBU.

Sadržaj.

§ Strana

Uvod 1
1. Nauk o prostoru 1

I. Osnovni pojmovi.

2. Jednostavni tjelesni oblici 3
3. Točke i pravci 6
4. Zadaće o pravcu 8
5. Ispoređivanje i mjerenje dužina 10
6. Ravnina i kugla 11
7. Kružnica i krug 13
8. Okomitost pravaca i ravninâ. Pravi kut 15
9. Kut 20
10. Mjerenje kutova i lukova 24
11. Paralelne ravnine i pravci 27

II. Svojstva jednostavnih ravnih likova.

12. Kvadrat i pravokutnik 31
13. Trokut 34
14. Paralelogram 37
15. Zbroj kutova u trokutu i četverokutu 38

III. Primjena metričkog sustava mjerâ.

16. Ploština kvadrata i pravokutnika 40
17. Obujam kocke i pravokutnog paralelepipeda 42

IV. Simetrija.

18. Simetrija prostornih tvorevina 44
19. Simetrija ravnih likova 45
20. Osnovne konstrukcije 47
21. Konstrukcija kvadrata, pravokutnika i pravokutnog trokuta 53

*

V. Kongruencija.

§		Strana
22.	Kongruentni ravni likovi	56
23.	Konstrukcija kosokutnih trokuta	56
24.	Dovoljni podatci za određivanje trokuta	60
25.	Najkraći put između dvije točke	62
26.	Četverokut	62
27.	Mnogokut (poligon)	65
28.	Pravilni mnogokut i dijeljenje kružnice	65
29.	Primjena pravilnih mnogokuta	69
30.	Glavna svojstva kruga	71

VI. Jednostavna geometrijska tjelesa.

31.	Uspravna prizma	78
32.	Predočivanje prizme crtanjem. Mreža prizme	80
33.	Uspravni valjak	83
34.	Piramida	85
35.	Stožac	88
36.	Kugla	92

VII. Opsezi i ploštine.

37.	Poređenje i dijeljenje likova	96
38.	Pretvaranje likova	99
39.	Izračunavanje opsega	101
40.	Izračunavanje ploština paralelograma, trokuta, trapeza	103
41.	Ploštine nepravilnih mnogokuta	106
42.	Ploštine pravilnih mnogokuta i kruga	107
43.	Pitagorin poučak	110
44.	Primjena Pitagorina poučka	112
45.	Grafičko prikazivanje nekih aritmetičkih izraza	115

VIII. Sličnost trokuta.

46.	Pojam sličnosti	118
47.	Crtanje u umanjenom (uvećanom) mjerilu	120
48.	Konstruiranje sličnih likova	123

IX. Izračunavanje oplošja i obujma.

49.	Uspravna prizma i valjak	126
50.	Uspravna piramida i stožac	129
51.	Kugla	131

Uvod.

§ 1. Nauk o prostoru.

1. Nije davno, što ste poznali svoju novu školsku sobu. No ako je i ne poznajete odavna, ipak bi svaki od vas odmah opazio promjenu u namještaju klupâ, slikâ i ostalih predmeta, kad bi tko te predmete najedamput drukčije porazmještao. Vi biste ih pače i sami znali opet povratiti u stari red, kad bi vas tko pozvao, da to učinite. Ali taj red ne bi zacijelo bio potpuno onakav, kakav je bio prije, jer, da se taj red točno upamti, nije dovoljno sobu samo promatrati, već je također nužno, da se izmjeri razmak pojedinih predmeta. Nužno je na primjer, da znate, koliko je koja slika visoko od poda, koliko je daleko od prozora i t. d.

2. Da se dakle odredi položaj predmeta u našoj sobi, ili uopće u našoj okolini, nije dosta tu okolinu samo promatrati, već je nužno također, da i sâmi zahvatimo među te predmete, da radimo, da mjerimo.

A da možemo mjeriti, moramo imati nekakovo mjerilo. Takovo mjerilo možemo sastaviti i sami, pače možemo se u tu svrhu poslužiti i dijelovima našeg tijela: rukom, nogom i t. d.

Pa tako su ljudi isprva i radili, a rade još i danas; takove su se mjere i u govoru sačuvale: hvat, stopa, palac i t. d. Poznato vam je naročito, da se kaže n. pr.: bio sam sto koraka daleko od kuće.

Ali, dakako, kako nijesu kod različnih ljudi ruke i noge jednake. a i kod pojedinog se čovjeka ta uda mijenjaju, poseglo se već davno za mjerama, koje se ne mijenjaju, koje ostaju uvijek iste, pa su se napravile mjere od drva, kovinâ, konopâ, koji se ne rastežu i t. d.

Takova je mjera danas svuda u upotrebi: metar od drva ili metar kao nerastežljiva vrpca. Kako se s takovom mjerom mjeri, vidite svaki dan kod različnih zanatlija, a vidite to često i kod kuće. Ali da stečete sigurnost u točnom mjerenju, mjerit ćemo mnogo i u školi. Prema tomu bit će prva vaša zadaća, da se naučite brzo i okretno mjeriti.

3. Vi biste znali također vašu sobu i opisati, ali opisu vašem dalo bi se dašto mnogo prigovarati. Naročito bi bilo teško prema vašem opisivanju potpuno točno načiniti sobu, kakova je vaša: s potpuno jednakim predmetima i s jednakim razmještajem tih predmeta. A nemoguće bi to bilo zato, što vi još ne poznajete riječi i izraza, kojima se kod takova opisivanja služimo, i koje vi imate istom da naučite u nauku o prostoru.

Vi ćete dakle morati učiti nove riječi i njihovo značenje. Pa kao što ste već u ranom svom djetinstvu naučili n. pr. značenje riječi „crven“ promatranjem predmeta crvene boje i kao što ste se na različnim predmetima naučili i razlici između crvene i druge koje boje, tako ćete se promatranjem predmeta naučiti riječima, koje upotrebljavamo u nauku o prostoru, naučit ćete se i razlikovati pojedine riječi jedne od drugih po njihovu značenju.

No kao što niko nikada nije vidio crvene boje drukčije nego na različnim predmetima, na crvenu suknu, crvenu staklu i t. d., tako ćete se i sa značenjem novih riječi upoznati samo na različnim predmetima.

Predmeti, koji nam u nauku o prostoru služe za upoznavanje novih riječi i njihova značenja, zovu se modeli.

Takove modele pravit ćete i sami iz papira ili drugog materijala, i učiti se opisivati ih. To će biti druga vaša zadaća u nauku o prostoru.

4. No da se model napravi, ne će biti dovoljno samo mjerenje, već ćete za to trebati i drugih sprava i pomagala. Kakova su to pomagala i kako se upotrebljavaju, također ćete naučiti. Veličina i položaj predmeta u našoj okolini dade se odrediti mjerenjem, ali da odredimo i oblik predmetima, moramo se služiti novim pomagalima. Da napraviš n. pr. kotač za svoja kolica od drva ili kartona, moraš se poslužiti okruglim kojim predmetom. Da se napravi kotač ili drugi koji okrugli predmet u bilo kojoj veličini, služimo se spravom, koju ćeš vidjeti kod kolara ili bačvara,

a zove se šestar. Šestarom ćemo se vrlo mnogo služiti u nauku o prostoru.

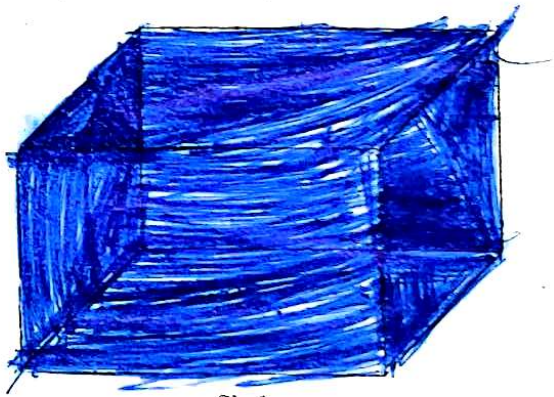
5. Ali kako u našoj okolini ima vrlo mnogo različitih oblika (pomisli samo na prerazlične oblike lišća, cvijeća i t. d.), bilo bi vanredno teško sve te oblike opisavati riječima. Mjesto da ih opisujemo, mi te oblike nacrtamo, pa se iz takova crteža može puno više saznati o obliku, nego iz bilo kako opširna opisivanja. Vi ćete u nauci o prostoru učiti, kako se crtaju jednostavni predmeti i modeli; ali iz tih crteža morat će se moći razabrati točno veličina, oblik i položaj nacrtanih predmeta. To crtanje bit će glavna naša zadaća u nauku o prostoru.

6. Nauk o prostoru ne obazire se na tvar, iz koje je predmet napravljen. Kada se ima izmjeriti polje, onda se ne pita, je li ono dobro ili nije. Kada pravimo nacrt za vrata, onda ne mislimo na drvo, iz kog će ih stolar načiniti.

I. Osnovni pojmovi.

§ 2. Jednostavni tjelesni oblici.

1. U školi su nam bili pokazani modeli, koje možemo crtanjem predočiti onako, kako je to pokazano na slikama 1. do 5. Ono, što nam ti modeli predočuju, nazivamo **tijelom.** Slike naše prikazuju te modele, dakle nam i one predočuju tjelesa; ali je to prikazivanje tijela slikom drukčije, ono je samo za oko, a nije i za opip, kao što je model.



Sl. 1.

2. Slika 1. prikazuje nam tijelo, koje se u nauci o prostoru zove **paralelepiped.** Takovih tjelesa nalazimo u našoj okolini vrlo često. Vaša školska soba i vaše sobe kod kuće redovno imaju takov oblik. Sanduci, kutije, grede, stupovi i t. d. imaju također oblik paralelepipeda.

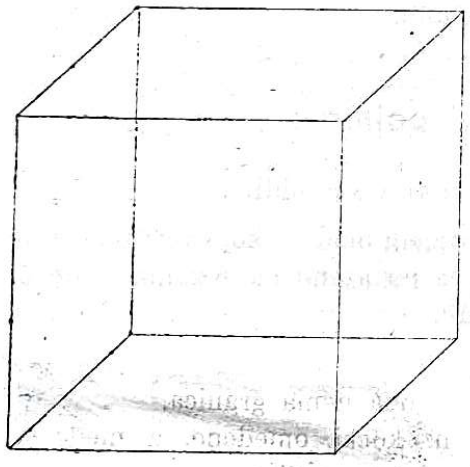
*

3. U nauci o prostoru imat ćemo često posla s jednim tijelom, koje po obliku svome pristaje također među paralelepipede a zove se **kocka,** koju prikazuje slika 2., a model vam je bio u školi pokazan.

4. Isto tako vam je bio u školi pokazan model tijela, koje nam prikazuje slika 3., a zove se **valjak** ili **cilindar.**

I tjelesa, koja imadu oblik valjka, nijesu rijetka u našoj okolini. Cijevi, cilindri na lampi, čaše, lonci, mnogi stupovi, noge na stolovima, kutije i t. d., imaju redovno cilindrički oblik.

5. Slika 4., prikazuje nam kuglu; i taj oblik nalazite često među predmetima. Mnogo voće kao jabuke, naranče, trešnje, jagode od grožđa i t. d., imaju oblik kugle. I lopta, kojom se



Sl. 2.

Sl. 3.

igrate, ima takov oblik; a nalazite kuglu kao ures u cvijetnjacima i vrtovima, napravljenu od stakla ili metala; na stupovima kod ulaza u vrtove; na tornjevima i drugdje.

6. Promatrajmo sada s jedne strane kocku, a s druge valjak i kuglu.

Ako pružiš ruku prema njihovim modelima, vidjet ćeš i osjetiti, da ne možeš rukom prodrijeti u nutrinju, jer su sva ta tijela zatvorena ili omeđena, a omeđena su **plohama.**

Na kocki vidiš, da su joj sve plohe ravne kao ravan stol, mramorna ploča, zrcalo, površina mirne vode u posudi i t. d.

Kako stolar pravi ravninu?

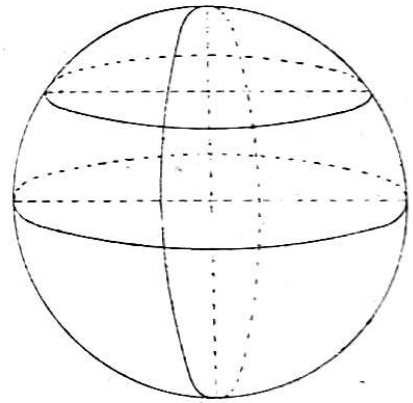
Kod valjka, koji je omeđen s tri plohe, vidiš da su dvije ravne a treća je obla ili zakrivljena.

Ali i tu treću plohu možeš odviti u ravninu, o čem ćeš se lako uvjeriti ovako. Uzmi komad ravna papira pa ga pomno obvij oko valjka, papir će se sasvim priljubiti uz valjak. Taj papir, koji si bio obvio, možeš opet odviti, razviti i postaviti na ravan stol. Ploha kugle niti je ravna niti se dade odviti u ravninu; jer ako pokušaš bilo kakvu kuglu obviti listom ravna papira, vidjet ćeš, da se nikako ne đa priljubiti uz kuglu, već će se na njemu napraviti različni nabori. Iz toga vidimo, da plohe određuju oblik i veličinu tijela.

7. Na modelima se vidi, da se plohe, dvije po dvije, sastaju u **crtama,** ili kako se drugčije kaže „plohe" su omeđene crtama.

Crte na modelima tjelesa, u kojima se sastaju dvije plohe, zovu se **bridovi** tijela.

Ako dobro promatrate kocku i valjak, vidjet ćete, da su i crte, u kojima se sastaju plohe kocke, po obliku drukčije od crta, u kojima se sastaju plohe valjka. One prve zovu se **pravci** — a ove druge **kružnice.**



Sl. 4.

Kuglina ploha nije omeđena, ona nema granica.

8. I crte su, kako se vidi na kocki, omeđene, a među su njihove točke.

Točke na modelima tjelesa, u kojima svršavaju bridovi, zovu se **uglovi** tijela.

Primjeri. 1. Pobroji na modelu paralelepipeda ili kocke plohe, bridove, uglove.

2. U čem se dakle razlikuje kocka od paralelepipeda?

3. Na tijelu, koje se zove piramida (slika 5.), pobroji plohe, bridove, uglove.

4. Ima li valjak bridova i uglova? i koliko?

5. Ima li kugla bridova i uglova?

6. Odlupi pomno koru naranče i pokušaj je raširiti na ravnu stolu, a da je ne raskidaš.

§ 3. Točke i pravci.

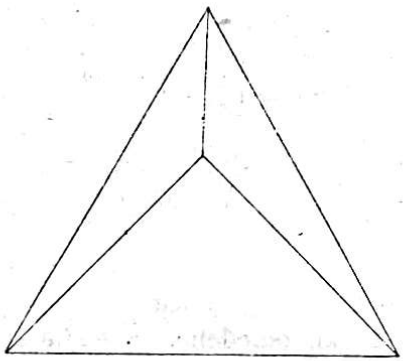
1. Točku nam predstavlja sitan komadić prašine u uzduhu, trag vrha igle ili dobro zašiljene olovke na papiru, mala mrljica tinte, kada perom pritisnemo na papir, ili zrnce krede, koje se prihvati table, kad je kredom dotaknemo.

Točke ćemo označivati velikim pismenima latinskim: točka *A*, točka *O* i t. d.

2. Pravac nam predstavlja crta, u kojoj se sijeku dvije ravne plohe, kako smo to vidjeli kod kocke.

Zato nam i služi za crtanje pravaca tijelo, na kome su bar dvije ravne plohe, koje se sastaju. Takovo tijelo nazivljemo **ravnalom** ili **linealom.**

Pravi se obično od tanka drva, ali ga lako možete načiniti sami, ako list ravna papira savinete tako, da mu jedan dio pokrije drugi. Ako je papir pretanak, možete već savinuti papir savinuti još i po drugi i po treći put.



Sl. 5.

Mi ćemo se kod crtanja pravaca služiti ponajvećma modelima trokuta, jer na njima imamo tri ravnala. No ti će nam trokuti, koji su također napravljeni od tanka drva, služiti još i za drugo, kako ćemo to vidjeti.

Da povučemo jedan jedini pravac, služimo se najradije ravnalom.

3. Kad ravnalom vučeš pravac, onda početak i kraj nacrtana pravca zavisi potpuno od tvoje volje. Jedino, što te kod toga može da sprečava, jest prostor papira ili table, na kom crtaš. Dužina ravnala ne čini kod toga nikakvih zapreka, jer ga možeš pomicati lijevo ili desno i prema tomu nacrtati pravac koliko hoćeš dugačak. Kod takova pomicanja imaš dakako paziti, da se brid ravnala dotiče neprestano već nacrtanog dijela pravca.

Iz ovoga se promatranja učimo, da se svaki pravac može preko svojih krajeva produljiti, koliko hoćemo; on nema ni početka ni kraja.

4. Unapredak ćemo pod imenom **pravac** razumijevati samo onaku tvorevinu, koja nije ograničena, koja se dakle dade na jednu i drugu stranu po volji produljiti. Naprotiv ćemo dio pravca, koji se samo s jedne strane dade produljivati, zvati **zrakom,** a dio pravca, koji je s obje strane ograničen, zvat ćemo **dužinom.**

5. Izraz zraka potječe odatle, što nam pravac može da predstavlja i zraka svjetlosti, koja od sunca ili mjeseca prodire kroz mali otvor u sobu.

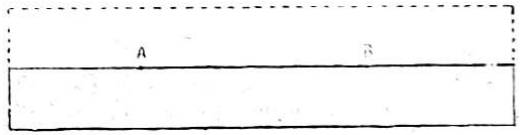
6. Pravac nam predočuje i tanka nit pričvršćena na dva mjesta tako, da bude napeta. Ako nit nije napeta, već visi između dvije točke, onda nije više pravac, već kriva crta. Odatle slijedi, da je pravac najkraća spojnica između dvije točke.

Kad hodaš poljem i želiš najkraćim putem doći k jednoj točki, onda udariš pravcem.

7. Ako između iste dvije točke napneš dvije niti, vidjet ćeš, da će se obje niti tako podudarati, da već iz posve neznatne daljine ne ćeš moći jednu od druge razlikovati.

Odatle slijedi: dva pravca, koja imaju zajedničke dvije točke, imaju i sve ostale točke zajedničke; ili drukčije rečeno, ta se dva pravca podudaraju. To se može još i ovako reći: kroz dvije točke možemo uvijek nacrtati pravac; ali nacrtati možemo uvijek samo jedan.

8. Na osnovi toga svojstva pravca možemo ispitati, jesu li valjana ravnala, kojima se služimo kod crtanja pravaca. Poznato je naime, da se drvo iskrivi, ako se jako osuši ili nakvasi, pa se može dogoditi, da su se i naša ravnala, i ako su bila dobro napravljena, kasnije iskrivila.



Sl. 6.

Najjednostavnije se ispita ravnalo ovako: Uz brid, koji hoćemo ispitati, povučemo olovkom crtu *AB*. Tada prevrnemo ravnalo tako, da ga okrenemo oko brida, koji hoćemo da ispitamo, pa ravnalo dođe u položaj, koji je na slici označen točkicama (slika 6.). U tom novom položaju povučemo ponovno crtu *AB*. Ako se tada ove dvije crte podudaraju, onda su to pravci, i ravnalo je dobro. Ako se crte u pojedinim dijelovima

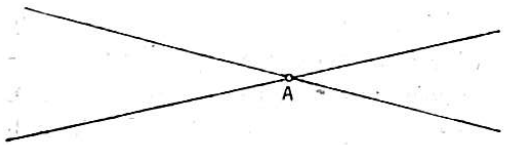
svojim ne podudaraju, onda crte nijesu pravci, i ravnalo nije dobro. Na taj način nesamo da se možemo uvjeriti, je li ravnalo dobro ili nije, već možemo da vidimo još i to, gdje je ono pogrješno, i kolike su te pogreške.

Vrtlari i zidari služe se napetim konopcem, kada hoće da dobiju pravce. S pomoću takova konopca možemo također da ispitamo ravnalo.

§ 4. Zadaće o pravcu.

1. **Zadaća:** Zadanom točkom A povuci pravac. To jest nacrtaj pravac, koji prolazi zadanom točkom. To je prva osnovna zadaća u nauci o prostoru, a rješava se ovako: brid ravnala ima doći upravo na onu zadanu točku A, ako se kod crtanja služimo tanko zašiljenom olovkom ili kredom; ako li je olovka ili kreda odeblja, moramo između točke i brida ravnala ostaviti mali razmak, koji zavisi od te debljine i koji se kušanjem odredi.

Takovih pravaca, koji idu svi jednom točkom, možemo povući koliko hoćemo. Za dva pravca, koja idu istom točkom, kažemo u nauci o prostoru, da se sijeku. Dva se pravca mogu sjeći samo u **jednoj** točki, jer smo već čuli, da se dva pravca, koji imaju zajedničke **dvije** točke, potpuno podudaraju, to jest nijesu više dva pravca već samo jedan (slika 7). Pravci, koji prolaze jednom točkom, razlikuju se jedan od drugoga po smjeru. Skup svih pravaca, koji idu istom točkom, tvori pramen pravaca (slika 8). Točka O zove se vrh pramena.



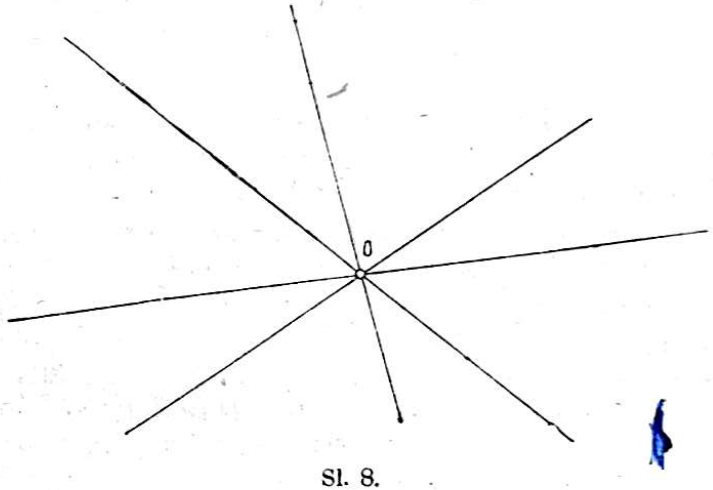
Sl. 7.

Bilješka. U pramenu možeš povući pravaca koliko hoćeš, baš onako, kako možeš pravac produljiti s jedne i druge strane, koliko hoćeš, ili onako, kako brojenjem možeš dobiti broj velik, koliko hoćeš. Izrazom „koliko hoćeš“ označujemo, da se ni jedna od spomenutih operacija ne dâ dovršiti.

2. **Zadaća:** zadanim točkama A i B povuci pravac.

To jest: nacrtaj pravac, koji prolazi zadanim točkama. To je druga osnovna zadaća u nauci o prostoru a rješava se ovako:

brid ravnala postavi se na točke A i B a dalje se postupa onako, kako je rečeno kod prve zadaće (slika 9.). Jasno je, da se u ovom slučaju može povući jedan jedini pravac. Prema tomu označivat ćemo pravce sa dva velika latinska pisma AB, i time označivati, da pravac prolazi točkama A i B; a u tom označivanju ne će moći da nastane nikakva pomutnja, kad znamo, da kroz



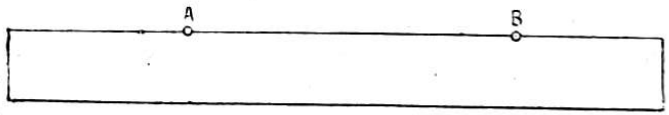
Sl. 8.

dvije točke ide uvijek samo jedan pravac. Osim toga označivat ćemo pravce još i malim latinskim pismenima p, q, r i t. d.

Primjeri. 1. Nacrtaj bilo kakva dva pravca i odredi točku, u kojoj se sijeku.

2. Zadaju se tri točke; povuci tim točkama pravce; koliko ih ima?

3. Koliko pravaca ide kroz 4 zadane točke? Nacrtaj ih.



Sl. 9.

4. Zadana su dva para točaka A, B i C, D. Kroz svaki par povuci pravac i odredi točku, u kojoj se ta dva pravca sijeku.

5. Zadana je točka O a osim nje još točke A, B, C . . .

Točkom O i točkama A, B, C . . . povuci pravce; što si time dobio?

6. Zadaju se dva pravca; nacrtaj pramen, kome ta dva pravca pripadaju.

7. Koliko pravaca zadana pramena ide svakom točkom, koja nije vrh pramena?

8. Nacrtaj dve pramena; ima li koji pravac, koji pripada i jednom i drugom pramenu, i koji je to?

9. Nacrtaj pramen i jedan pravac, koji ne pripada pramenu. Odredi točke, u kojima pravac siječe pramen.

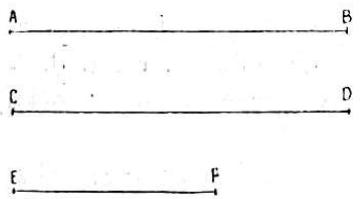
§ 5. Isporedivanje i mjerenje dužina.

1. Dvije se dužine isporeduju, ako se jedna postavi na drugu tako, da im se jedan par krajnih točaka podudara. Ako se kod toga podudara i drugi par krajnih točaka, onda kažemo, da su dužine jednake; ne padaju li pak zajedno, onda je ona dužina manja, kojoj drugi kraj pada između krajeva druge dužine.

Znak: $=$ čitaj „jednako“; $>$ čitaj „veće“; $<$ čitaj „manje“.

U slici 10. bit će $AB = CD$; $CD > EF$; $EF < AB$.

2. Da se isporede dvije nacrtane dužine, zabilježe se na ravnalu ili na listu papira s ravnim rubom krajevi jedne od nacrtanih dužina. Tako se na ravnalu dobije jednaka dužina, koju onda možemo isporediti s drugom. Mjesto ravnala može se upotrebiti i šestar: njegovi se šiljci postave na krajeve dužine, i tako se dužina „uzme u šestar“, kako se to obično kaže.



Sl. 10.

3. Dužina se mjeri tako, da se jedinica dužine ili njeni dijelovi nanose na zadanu dužinu od jednog njenog kraja do drugog. Broj, koji nam kazuje, koliko smo puta to učinili, jest mjerni broj dotične dužine.

Za jedinicu dužine uzimamo metar (m) ili njegove dijelove i mnogokratnike; cm, mm, km.

Bilješka. Ravnalo razdijeljeno na centimetre i milimetre zove se mjerilo. Da se mjerilom što točnije izmjeri jedna dužina, uzme se ona u šestar ili se na rubu ravna tanka papira označe njeni krajevi i onda na mjerilu izmjere. Kod toga nije nužno, da se jedan kraj dužine podudara baš sa ništicom mjerila; može to biti i drugi koji broj n. pr. 10 cm, ili 20 cm; ali šiljci

šestara moraju ili oba doći na brid mjerila ili pak oba jednako daleko od njega. Isto se tako postupa, kada se ima nacrtati dužina, zadana svojim mjernim brojem. Da nacrtamo na pr. dužinu od 3·7 cm. postavit ćemo jedan šilj šestara na jedan zarez mjerila označen sa 10 cm a drugi na sedmi zarez iza 13 cm pazeći kod toga točno, da šiljci stoje jednako daleko od brida. Dužinu, koju smo tako uzeli u šestar, prenesemo tada na papir, koji nam služi za crtanje.

Primjeri. 1. Izmjeri dužinu klupe; visinu i širinu vrata, prozora, knjiga i drugih predmeta.

2. Izmjeri bridove kocke; što znaš reći o njima?

3. Isto tako izmjeri bridove paralelepipeda; kako ih možeš po veličini podijeliti u grupe? kako leže jednaki a kako nejednaki bridovi?

4. Nacrtaj dužine 4·3 cm, 1·6 cm, 2·8 cm. Nanesi te tri dužine na jedan pravac jednu iza druge. Kolika mora da je dobivena dužina. Izmjeri je.

5. Nacrtaj dužinu 6·3 cm i od nje odreži dužinu 2·5 cm; kolika mora da bude razlika tih dviju dužina? Izmjeri tu razliku.

6. Dužinu 2·3 cm podvostruči, potrostruči i t. d. kolike su tako dobivene dužine? Izmjeri ih.

7. Dužinu 7·2 cm podijeli „od oka“ na dva, tri, četiri dijela; kolik bi imao biti svaki dio, kad bi dijelenje bilo točno. Izmjeri dobivene djelove i uglavi razliku između dužine dobivene crtanjem i prave dužine.

8. Dužinu od 8 cm podijeli na 10 jednakih dijelova.

9. Koliko se puta dužina od 1·2 cm nalazi u dužini od 3·6 cm, 4·8 cm, 6·0 cm, 7·2 cm?

10. Koliko se puta dužina od 1·2 cm nalazi u dužini od 1·8 cm, 2·7 cm, 4 cm?

§ 6. Ravnina i kugla.

1. Ravnalo, za koje smo se uvjerili, da je dobro, položit ćemo na stol, za koji smo rekli, da nam predstavlja ravninu, tako, da dvije njegove točke dođu na stol. Ako to učinimo, vidjet ćemo, da će mu i sve ostale točke pasti u ravninu stola. To će se dogoditi uvijek, makar kako ravnalo na stol položili.

Isto tako ćeš opaziti, da će se i napeta nit posvema nalaziti na površini stola, ako samo dvije točke niti pritisneš na površinu stola i paziš, da nit bude dovoljno napeta.

Iza toga slijedi:

Pravac, koji spaja dvije točke ravnine, leži posve u toj ravnini.

2. Ima doduše i drugih ploha, na kojima možeš dvije točke spojiti pravcem, ali to nijesu kojegod dvije točke. Takova je na pr. ploha valjka. Da nađeš pravce, koji se dadu na plohi valjka nacrtati, povalit ćeš model valjka na stol i gledati, u kojim se pravcima model valjka dotiče ravnine stola.

Pokaži na modelu valjka nekoliko parova točaka, koje možeš spojiti pravcima. Pokaži na ravnini stola, da možeš svake dvije točke spojiti pravcem.

Odatle slijedi:

Ima jedna jedina ploha, na kojoj možemo bilo koje dvije točke spojiti pravcem, a ta je ploha **ravnina.**

Ispituj, jesu li korice knjige ravnine.

3. Ima još jedno svojstvo, koje pripada među svim plohama jedino ravnini i nijednoj drugoj plohi. To ćemo svojstvo upoznati ovako.

Uzmi ovelik komad tvrda ali tanka ravna papira; probuši ga i pričvrsti iglom na bilo koju točku ravna stola ili školske ploče. Komad papira pasti će kod toga potpuno u ravninu stola ili ploče. I ako papir vrtiš oko igle, uvijek će se potpuno doticati i pokrivati s ravninom, koja je ispod njega.

Ako je papir tanak i ravan s obje strane, moći ćeš ga i prevrnuti, pa će se i onda pokrivati s ravninom stola ili ploče.

Sva ta svojstva ima ravnina; ali ona ih i jedina ima sva.

4. Kugla ima samo neka od tih svojstava. To ćeš vidjeti ovako.

Uzmi naranču i pomno joj odlupi pola kore, da se ne podere. Nakon toga odlupi i preostalu koru. Sada imaš dvije plohe kugle: olupljenu naranču i komad njene kore. Taj ćeš komad kore moći postaviti na naranču bilo gdje, moći ćeš je i pomicati po naranči, kako si prije pomicao komad papira po stolu; ali jedno ne ćeš moći učiniti: koru prevrnuti i onda učiniti, da se sve točke kore podudaraju s narančom.

Prema tomu ne ćeš moći postaviti dvije kugle jednu na drugu, da se potpuno podudaraju, kako se podudaraju dvije knjige, kad jedna stoji na drugoj?

Kako bi mogao dvije cilindričke plohe pomicati jednu po drugoj? Pokaži to na modelu, ako model cilindra obviješ savijenim listom papira, komu si prilijepio krajeve.

5. Osim te razlike između kugle i ravnine ima još jedna: a ta je, da se na plohi kugle ne mogu nikako crtati pravci.

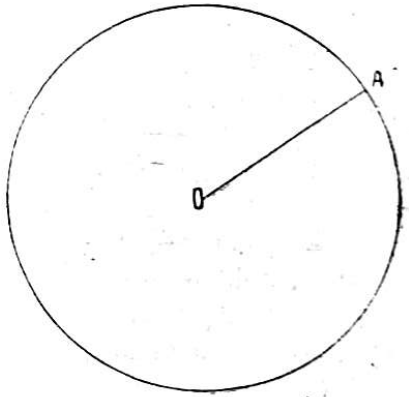
6. Skupivši sve u jedno možemo da kažemo: Svakom točkom ravnine može se povući koliko se hoće pravaca; svakom točkom cilindričke plohe može se povući samo jedan pravac; kod kugle ne može se ni u jednoj točki njene površine povući pravac.

§ 7. Kružnica i krug.

1. Bridovi valjka nijesu ravni, oni su zakrivljeni. Bridovi valjka predočuju nam crtu, koja se zove kružnica.

Za crtanje kružnice služimo se šestarom.

Da se šestarom nacrta kružnica, zabode se jedan krak njegov svojim šiljem u papir; u jednoj njegovoj točki *O;* a drugim krajem, koji svršava olovkom, vuče se kružnica. Razmak krajeva na krakovima ima kod toga, da ostane isti (slika 11.). Prema tomu bit će i sve točke kružnice jednako daleko od one čvrste točke, u kojoj je zaboden šilj drugog kraka. Čvrsta točka zove se središte kružnice, a udaljenost bilo koje točke na kružnici od središta zove se polumjer (radius) kružnice.



Sl. 11.

2. Dio ravnine, omeđen kružnicom, zovemo krugom. Kružnica je opseg ili periferija kruga. No često se i kružnica sama zove krugom, pa ćemo je i mi u ovoj knjizi tako zvati. Razlog je tome lako shvatiti. Kada nacrtamo kružnicu, nacrtali smo u isti mah i krug; za to ćemo govoriti: središte kruga,

polumjer kruga i t. d. što je, kako i sam vidiš, ispravnije nego li središte kružnice, polumjer kružnice i t. d.

Kružnica je crta, a krug je ploha.

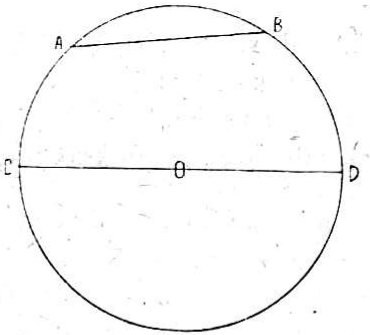
3. Komad kružnice omeđen s dvije točke A i B zove se luk $(\overset{\frown}{AB})$ kružnice (slika 12.). Ravna dužina, koja spaja točke A i B zove se tetiva $(\overline{AB})$ kruga. Tetiva CD, koja ide središtem, zove se promjer (dijametar).

4. Dio kružne plohe omeđen lukom i tetivom zove se kružni odsječak (segment), a dio kružne plohe omeđen lukom i s dva polumjera njegovih krajnih točaka zove se isječak krugu (sector) (slika 13.).

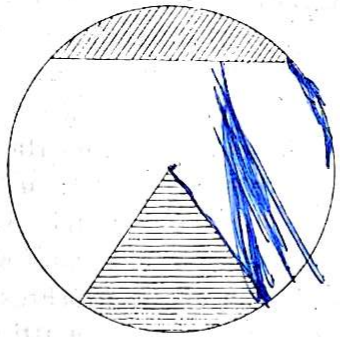
Primjeri. 1. Nacrtaj krug s polumjerom 2 cm, 3·5 cm, 4·4 cm i t. d.

2. U krugu polumjera 3 cm, povuci tetivu dugu 4 cm, 5 cm, 6 cm.

3. U bilo kojem krugu povuci najveću tetivu. Kolika je ona?



Sl. 12.



Sl. 13.

4. U bilo kojem krugu nacrtaj polumjer i produži ga preko središta, dok ne siječe kružnicu. Što si dobio?

5. Razdijeli krug na dva jednaka dijela. Kako se krug podijeli na dva jednaka dijela?

6. Nacrtaj dužinu AB od 4 cm. Oko krajnih točaka A i B kao središtâ nacrtaj dvije kružnice. Nacrtaj njihovu zajedničku tetivu i odredi točku, u kojoj ta tetiva siječe dužinu AB. Koliko je ta točka daleko od A i B?

7. Nacrtaj više krugova s istim središtem ali s različnim polumjerom (koncentrični krugovi).

8. Nacrtaj dva jednaka kruga. Kada su krugovi jednaki?

9. Nacrtaj bilo kakov krug i jedan njegov polumjer. Uzmi jednu točku unutar kruga i spoji je sa središtem. Isporedi tako dobivenu dužinu s polumjerom.

10. Nacrtaj bilo kakov krug i jedan njegov polumjer. Uzmi jednu točku izvan kruga i spoji je sa središtem. Isporedi tako dobivenu dužinu s polumjerom.

§ 8. Okomitost pravaca i ravnina. Pravi kut.

1. Na modelu kocke promatrat ćemo i upamtiti položaj dviju ravnina, koje se sijeku; položaj bridova, koji se u jednom uglu sastaju; i napokon položaj bridova prema ravninama, u kojima oni ne leže.

Sve ćeš te položaje lako naći i prepoznati na stijenama i bridovima sobe.

Posebni taj položaj ravnina i pravaca, koji na svakom koraku sastajemo, opisujemo ovim riječima:

Dvije ravnine na kocki, koje se sijeku, stoje jedna na drugoj **okomito** (normalno).

Pokaži u sobi, na pokućstvu i t. d. ravnine, koje stoje okomito.

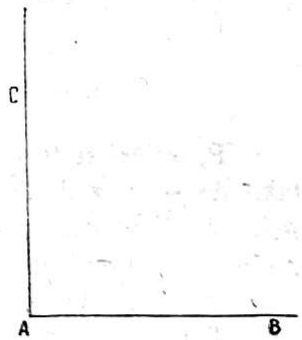
Svaka dva pravca (brida) na kocki, koja se sijeku, stoje jedan na drugom **okomito.**

Pokaži na predmetima okoline (na pr. sobe) okomite pravce.

Svi pravci (bridovi) na kocki stoje **okomito** na ravninama, u kojima ne leže.

Pokaži na predmetima okoline pravce, koji stoje okomito na ravninama.

2. Dva pravca, koja stoje jedan na drugom okomito, čine **pravi kut** (sl. 14.).



S 14.

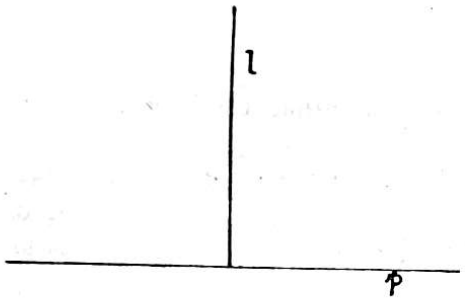
Traži primjere pravih kutova na predmetima okoline.

Obje zrake, koje izlaze iz jedne točke i stoje jedna na drugoj okomito, nazivamo krakovima pravoga kuta; a točku, iz koje te zrake izlaze, zovemo vrhom pravoga kuta.

Ako vrh pravoga kuta označimo velikim latinskim slovom A, a na krakove metnemo slova B i C, onda pravi kut označu-

jemo sa tri slova tako, da slovo na vrhu dolazi uvijek u sredini. Dakle $\sphericalangle BAC$ ili $\sphericalangle CAB$. Znak $\sphericalangle$ čitaj „kut".

Ako pravac p stoji okomito na drugom jednom l, onda se to označuje $p \perp l$. Znak $\perp$ čitaj „okomito" (slika 15.).



Sl. 15.

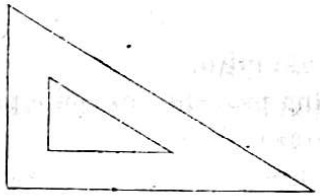
To se obično još i ovako izriče: pravac p je okomica pravca l i obrnuto.

3. Za crtanje okomica i pravih kutova služe nam modeli od tanka drva, „trokuti" (slike 16. i 17.).

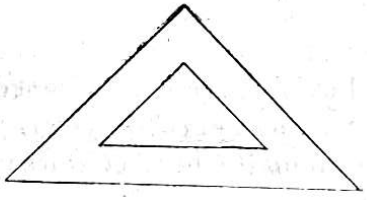
4. S pomoću tih modela možemo riješiti ove dvije osnovne zadaće:

– **Zadaća 1.** U zadanoj točki A pravca načrtaj okomicu.

Imamo dakle nacrtati pravi kut s vrhom u točki A i jednim krakom na pravcu. Prema tomu postavi se jedan krak modela na zadani pravac tako, da mu vrh dođe točno u točku A. Kad se to učini, stoji drugi krak modela okomito na zadanu pravcu, pa se okomica može povući (slika 18.).



Sl. 16.



Sl. 17.

Praktički se to najzgodnije izvede ovako: Ravnalo se postavi tako da se sa zadanim pravcem potpuno podudara: sada je lako jedan krak modela pravog kuta postaviti tako, da se s ravnalom podudara, i pomicati model dotle, dok vrh pravoga kuta ne padne u točku A, na kojoj imamo povući okomicu (slika 18.).

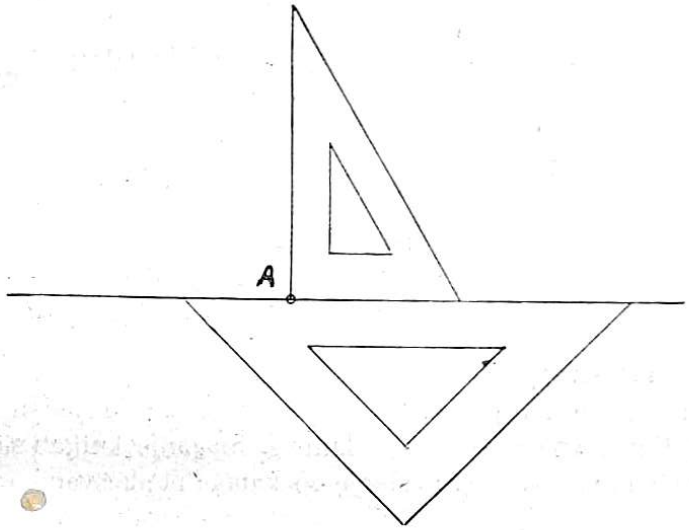
Taj je postupak naročito zgodan, kad ima da se riješi:

Zadaća 2. Zadanom točkom A izvan pravca povuci na nj okomicu.

Model, koji se jednim krakom pravog kuta dotiče ravnala, pomičemo dotle, dok drugi krak ne dođe u zadanu točku A. (slika 19.); tada povučemo pravac.

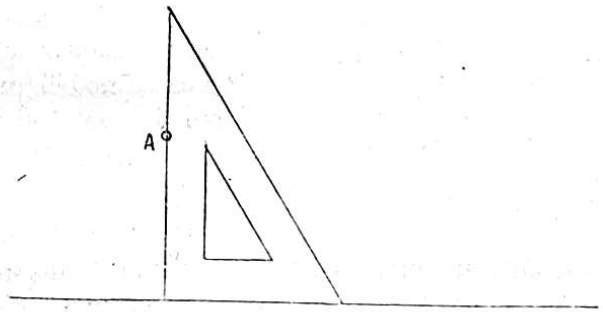
Ta druga zadaća može se još i ovako iskazati: iz zadane točke spusti okomicu na zadani pravac.

5. Saviješ li list papira na dvoje, predstavljat će ti rub, koji tako na papiru dobiješ, jedan pravac; saviješ li papir još jednom tako, da jedan dio ruba padne na drugi, dobit ćeš dva prava kuta, jedan povrh drugog.



Sl. 18.

Uvjeri se modelom, da su to doista pravi kutovi. Iz toga slijedi: Dva prava kuta mogu se uvijek postaviti jedan

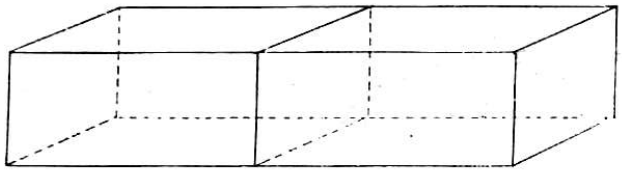


Sl. 19.

na drugi tako, da im se pokriju vrhovi i krakovi. Pokaži to na modelima pravog kuta, na listovima knjige, na modelima kocke, paralelepipeda i t. d. (slika 20.).

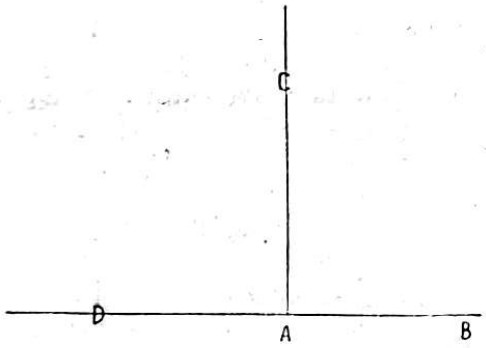
6. Ona dva prava kuta, koja su stojala jedan povrh drugog, možeš odvijanjem papira postaviti sada tako jedan uz drugi, da im se poduraraju vrhovi i jedan par krakova a drugi im par krakova pada u jedan pravac (slika 21.). Pokaži to isto s pomoću dva modela pravog kuta. Odatle slijedi:

Dva se prava kuta mogu da postave u takov položaj, da im se podudaraju vrhovi i jedan par krakova; a drugi par krakova pada u jedan pravac.



Sl. 20.

To svojstvo pravog kuta palo je već davno ljudima u oči; zato i nalazimo na predmetima, koji se slažu ili jedan povrh drugog ili jedan uz drugi, prave kutove. Slaganje kutija i sanduka u trgovačkim spremištima; zidanje opekama; popločivanje i parketiranje podova i t. d., sve su primjeri primijenjivanja toga svojstva pravoga kuta u običnom životu.



Sl. 21.

7. S pomoću toga svojstva pravoga kuta možemo također lako ispitati, jesu li modeli pravog kuta, što ih upotrebljavamo kod crtanja, dobri ili nijesu.

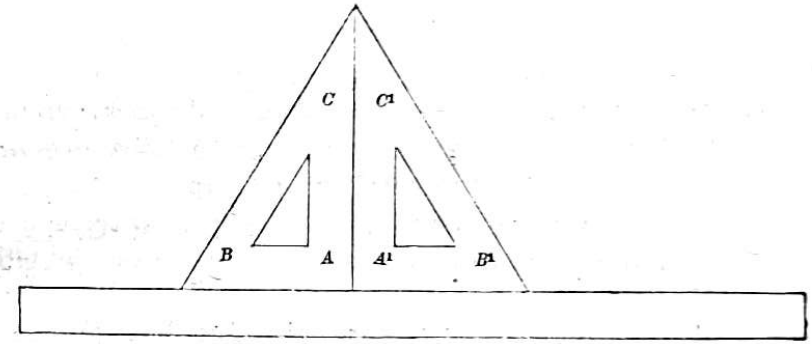
Uz ravnalo prislonit ćemo dobro jedan krak modela pravoga kuta u položaju BAC a zatim model prevrnuti u položaj $B'A'C'$ i paziti da se ravnalo kod toga ne pomakne. Okomice, što ih povučemo uz krakove AC i $A'C'$ moraju se podudarati, ako je model dobar (slika 22.).

8. Iz zadane točke A povuci na pravac p okomicu AB. Osim toga povuci još i druge dužine AC, AD i t. d. Ako te dužine isporediš mjerenjem, naći ćeš, da je okomica AB od svih

najkraća. Na toj okomici mjerimo udaljenost točke A od pravca p (slika 23.).

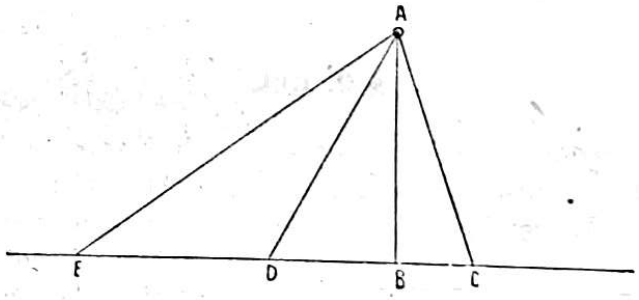
Bilješka: Ako pričvrstiš nit, kojoj je na donjem kraju privezan kakov težak predmet, na kakvu kvačicu ili čavao, umirit će se nit u jednom smjeru, koji se zove vertikalni smjer. Kamen, kada pada, kreće se također u vertikalnom smjeru.

Ravnina, koja stoji okomito na pravcu vertikalnog smjera, zove se horizontalna ravnina. Površina mirne vode u posu-



Sl. 22.

dama, jarcima, jezerima i t. d. jest horizontalna ravnina. U sobi je ravnina poda i stropa horizontalna. Ostale ravnine u sobi (stijene sobe), koje stoje okomito na onim horizontalnim ravninama, jesu vertikalne ravnine. Dvije se vertikalne ravnine sijeku



Sl. 23.

u pravcu, koji je također vertikalan. Pravci, koji leže u horizontalnoj ravnini, imaju horizontalan smjer. Pokaži u sobi, na kući i t. d. pravce i ravnine vertikalne. Kako ćeš se uvjeriti, da jedan pravac stoji doista vertikalno? Navedi još nekoliko primjera horizontalnih ravnina i pravaca.

Primjeri. 1. Nacrtaj pravac i odredi na njemu nekoliko točaka. U tim točkama nacrtaj okomice.

2. Nacrtaj pravac p i nekoliko točaka izvan pravca. Iz tih točaka povuci na pravac okomice.

3. Nacrtaj pravi kut. Na svakom kraku označi po jednu točku. U tim točkama podigni okomice i odredi točku, u kojoj se one sijeku; pokaži da se one sijeku pod pravim kutom.

4. Nacrtaj kružnicu i jedan njen promjer. Bilo koju točku kružnice spoji s krajevima promjera i pokaži, da je svaka takova točka vrh pravoga kuta.

5. U središtu kruga nacrtaj na jednom promjeru okomicu pokaži, da je time krug podijeljen na 4 jednaka dijela (kvadranta).

6. Iz središta kruga spusti na jednu njegovu tetivu okomicu; kakovi su dijelovi, na koje okomicâ dijeli tetivu?

7. U krugu, kome je polumjer 3 cm, nacrtaj tetive od 3 cm i od 5 cm. Izmjeri njihove daljine od središta. Koja je tetiva bliže središtu?

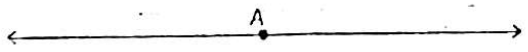
8. U krugu polumjera 3 cm nacrtaj tetivu, koja je od središta udaljena 1·8 cm,

10. U krugu nacrtaj dva okomita promjera i u krajnjim njihovim točkama okomice. Isporedi na okomicama dobivene dužine s promjerom.

11. Nacrtaj dužinu $AB = 4$ cm. Iz krajnjih točaka dužine nacrtaj kružnice s polumjerom od 3 cm. Kako stoji njihova zajednička tetiva na dužini AB?

§ 9. Kut.

1. Točkom A podijelimo pravac na dvije zrake, (slika 24.). Zamislimo sada na ravnu polju ili u sobi čovjeka, koji stoji u točki A. Taj se čovjek može sada kretati ili po jednoj ili po drugoj zraki. može se dakle kretati u dva protivna smjera. Smjer je dakle određen zrakom; prema tome svakoj zraki pripada posve određen smjer.



Sl. 24.

Postaviš li negdje na ravnom horizontalnom tlu vertikalno štap i zabilježiš zrakom, koja izlazi iz podnožja štapa, smjer sjene, kada je ona najkraća (u podne), onda takova zraka pokazuje put

sjevera. Zraka smjera protivnog pokazuje na jug. Te dvije zrake čine pravac, koji se u zemljopisu zove meridijanom točke, u kojoj je štap utaknut. Pravci, koji stoje okomito na meridijanu, pokazuju jednim svojim krajem na istok a drugim na zapad.

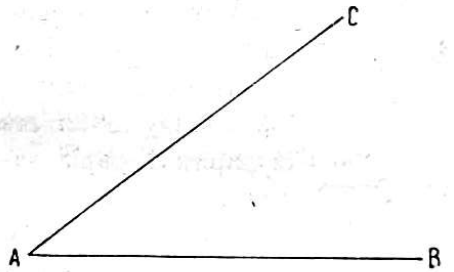
Bilješka. Zemlja ima oblik kugle, a na kugli se ne mogu crtati pravci. zato i meridijani i nijesu pravci već krugovi, kako se to vidi na globusu. Ali ako krug ima vrlo velik polumjer, kao što je to kod meridijana, onda se mali luk njegov ne dâ razlikovati od pravca.

U opće se mali luk kruga vrlo malo razlikuje od maloga dijela pravca, koji se dotiče luka. Pokaži to crtanjem.

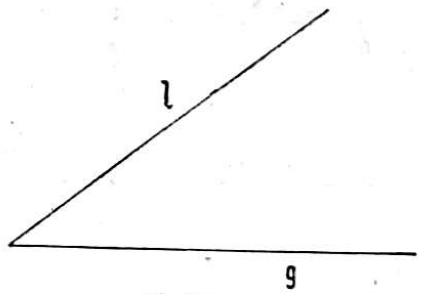
I pravci, koji na meridijanu stoje okomito, nijesu za pravo pravci, već krugovi, koji se u zemljopisu zovu paralelni krugovi ili paralele.

2. Dvije zrake, koje izlaze iz jedne točke, čine **kut.** Zrake se zovu **krakovi** a ona točka **vrh** kuta. Kutovi, koji nijesu pravi, zovu se kosi.

Kutovi u opće označuju se na isti način kao i pravi kutovi: dakle $\sphericalangle BAC$ (slika 25.); ako zrake označimo malim slovima, onda se kut označuje: $\sphericalangle gl$ (slika 26.). Kut se također označuje slovima grčkog alfabeta: α, β, γ i t. d.



Sl. 25.

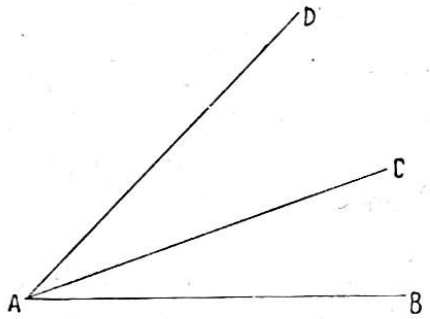


Sl. 26.

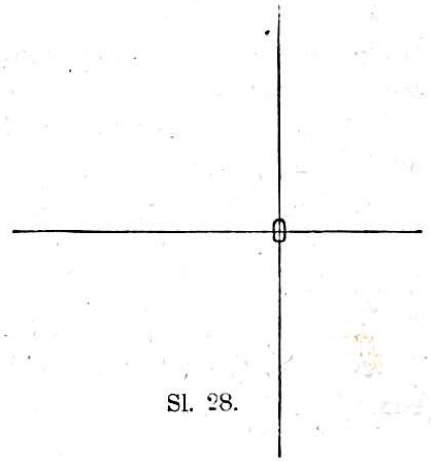
Što je veća razlika u smjeru zrakâ, koje čine kut, to će biti i kut veći; i samo od te razlike u smjeru zavisi veličina kuta, a ne možda od tog, jesmo li nacrtali krakove duže ili kraće.

3. Izreži iz papira dva kuta pa ih postavi tako, da im se podudaraju vrhovi i da krak jednog kuta padne na jedan krak

drugog; ako sada i drugi krak jednog padne na drugi krak drugog kuta, onda su kutovi jednaki. Ali ako krak jednoga padne između krakova drugog kuta, onda je onaj prvi kut manji a ovaj drugi veći. Veličina krakova, naravno, ne odlučuje kod toga ništa. Na slici 27. će biti $\sphericalangle BAC, < \sphericalangle BAD$.

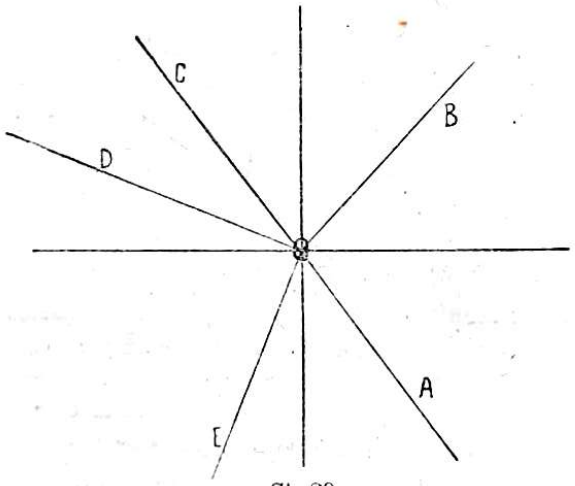


Sl. 27.



Sl. 28.

Zadaća. 1. Načini iz papira kakovgod kut i savini papir tako, da dobiješ jedanput jednake a drugi put nejednake kutove.



Sl. 29.

Zadaća 2. Nacrtaj jedan kut i kušaj ga zrakom podijeliti na dva jednaka dijela. Uvjeri se o ispravnosti tako. da taj kut izrežeš iz papira i papir savineš.

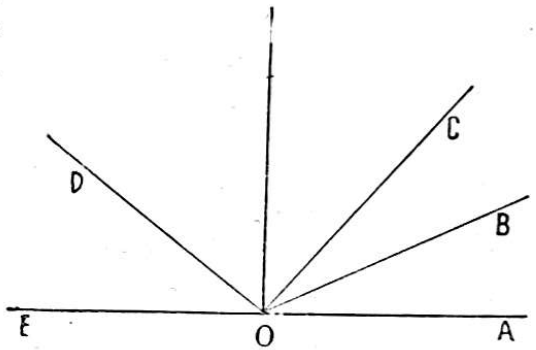
4. Dva pravca, koja stoje jedan na drugom okomito čine četiri prava kuta (slika 28.).

Iz promatranja slike 29. lako ćeš zaključiti, da su svi kutovi oko jedne točke jednaki sa četiri prava kuta. Iz promatranja slike 30. zaključit ćeš opet, da su svi kutovi s jedne strane nekog pravca jednaki sa dva prava kuta.

5. Kazaljke na uri čine kut. Taj se kut mijenja, jer se kazaljke na uri kreću. To se kretanje zove vrtnja ili rotacija. Vrtnjom prelazi jedna zraka pramena u drugu zraku istog pramena; vrh pramena ostaje kod toga na miru.

Kod vrtnje opisuje svaka točka zrake luk kružnice pa se može povratiti u prvotni položaj, kada takova točka opiše potpunu kružnicu. Kada se jedna točka zrake povratila u prvotni položaj, povratile su se u taj položaj i sve ostale točke zrake; zraka je napravila jedan potpuni okret. Novi se položaj zrake ni u čem ne razlikuje od starog.

Kazaljka, koja pokazuje minute, poprimi isti položaj svakog sata; ona napravi jedan potpuni okret u jednom satu. Odatle slijedi:



Sl. 30.

Kut postaje kada se zraka vrti oko svoje početne točke. Početni i konačni položaj zrake daje krakove kuta; vrh kuta je početna točka zrake.

Mjeru za veličinu vrtnje (okreta) a prema tomu i mjeru za veličinu kuta nastalog vrtnjom daje nam luk, što ga kod vrtnje opiše bilo koja točka zrake.

Potpunom okretu odgovara potpuna kružnica i **pun kut.**

Polovini okreta odgovara pol kružnice i **spružen kut.**

Četvrtini okreta odgovara četvrtina kružnice i **pravi kut.**

Pravi je kut polovina spruženog. Kutovi, koji su manji od pravog zovu se **šiljasti;** kutovi, koji su veći od pravog zovu se **tupi kutovi.** Kutovi koji su manji od spruženog kuta jesu **konkavni; konveksni** su kutovi veći od spruženog.

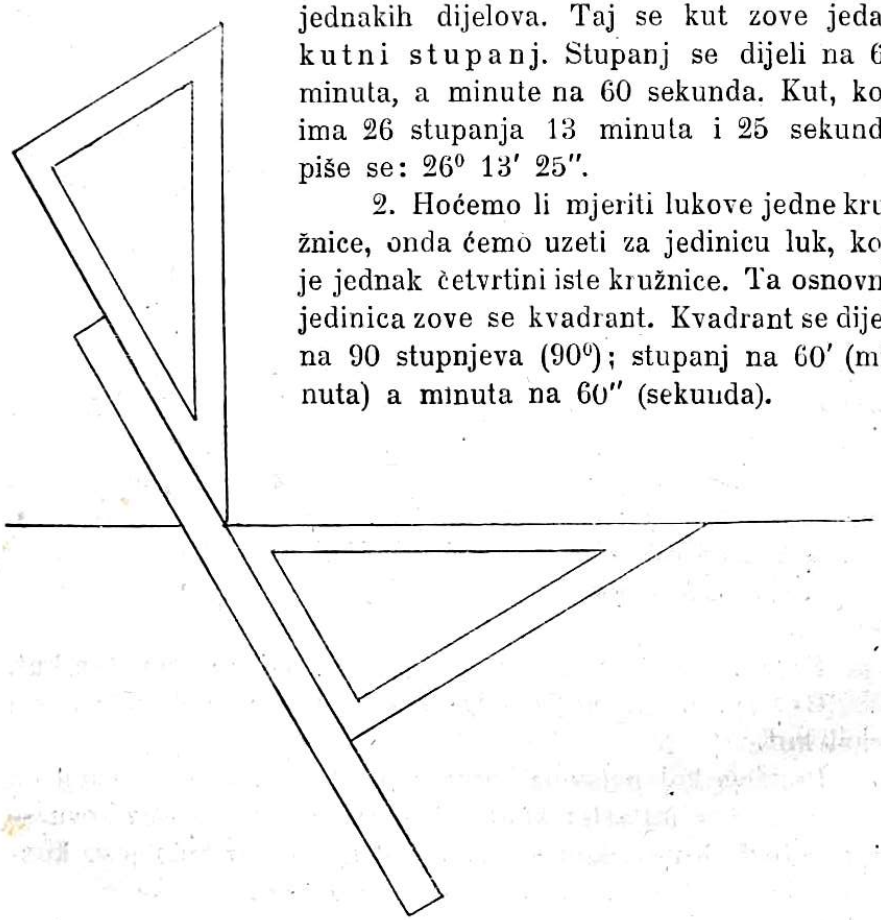
Primjena. Kada hoćemo uz zadani pravac konstruirati drugi, koji je na njem okomit, možemo to učiniti, ako zadani pravac zavrtimo za četvrt okreta. To se izvede ovako. Najdužu stranicu trokuta postavimo uz zadani pravac tako, da se s njim podudara. Uz jednu od manjih stranica tako postavljena trokuta

prislonimo dobro ravnalo. Sada ravnalo držimo čvrsto a trokut okrenemo tako, da druga od manjih stranica dođe uz ravnalo. Tom operacijom zakrenula se najveća stranica trokuta za pravi kut; ona stoji sada okomito na zadanu pravcu (slika 31).

§ 10. Mjerenje kutova i lukova.

1. Kut možemo mjeriti samo kutom, a za jedinicu mjere uzimamo kut, koji dobijemo, kada pravi kut podijelimo na 90 jednakih dijelova. Taj se kut zove jedan kutni stupanj. Stupanj se dijeli na 60 minuta, a minute na 60 sekunda. Kut, koji ima 26 stupanja 13 minuta i 25 sekunda piše se: $26^0\ 13'\ 25''$.

2. Hoćemo li mjeriti lukove jedne kružnice, onda ćemo uzeti za jedinicu luk, koji je jednak četvrtini iste kružnice. Ta osnovna jedinica zove se kvadrant. Kvadrant se dijeli na 90 stupnjeva (90^0); stupanj na $60'$ (minuta) a minuta na $60''$ (sekunda).



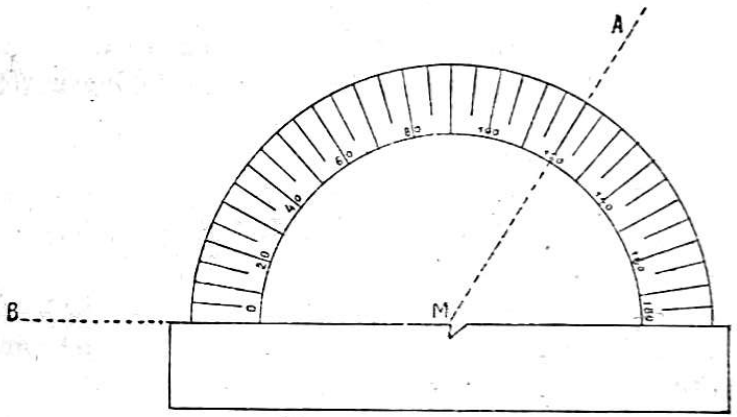
Sl. 31.

Bilješka 1. Valja imati na umu, da se samo lukovi istog kruga mogu dovesti u položaj da pokriju jedan drugi; lukovi različitih krugova ne mogu da se u takov položaj dovedu, baš

tako, kako ne može luk da pokrije pravac. Stoga se razloga i mjere lukovi samo lukom istog kruga. Svi kutovi, koji imadu n. pr. 1^0 jesu među sobom jednaki, dok su lukovi od 1^0 jednaki samo na istom krugu ili pak na jednakim krugovima.

Bilješka 2. Ekvator i meridijani na zemlji jesu jednaki krugovi. Luk od 1 minute na takovu krugu ima oko 1853 metra; to je morska milja, koja služi kao jedinica kod određivanja udaljenosti na moru.

3. Pravi kut odreže svojim krakovima na svim kružnicama, kojima je središte u njegovu vrhu, jedan kvadrant. Ako pravi kut podijelimo pravcem na dva jednaka dijela, to će taj pravac i svaki



Sl. 32.

onaj kvadrant podijeliti na dva dijela. Prema tomu imat će jedan kut toliko stupnjeva, minuta i sekunda, koliko ima stupnjeva, minuta i sekunda luk, što ga odrede krakovi kuta na kružnici, kojoj je središte u vrhu kuta.

Zato se i upotrebljava za mjerenje kutova polukrug podijeljen na 180^0. Taj se polukrug zove **kutomjer** ili **transporter.**

Slika 32. 33. pokazuje nam, kako se transporter upotrebljava za mjerenje kutova.

Bilješka 3. Dijelenje kutova na minute i sekunde nema velike vrijednosti u praksi, jer su to veoma mali kutovi. Kut što ga čine zrake iz oka krajnim točkama jednog dijametra plohe mjeseca ili sunca, ima oko $^1/_2{}^0$.

Primjeri 1. Nacrtaj nekoliko kutova i izmjeri ih kutomjerom.

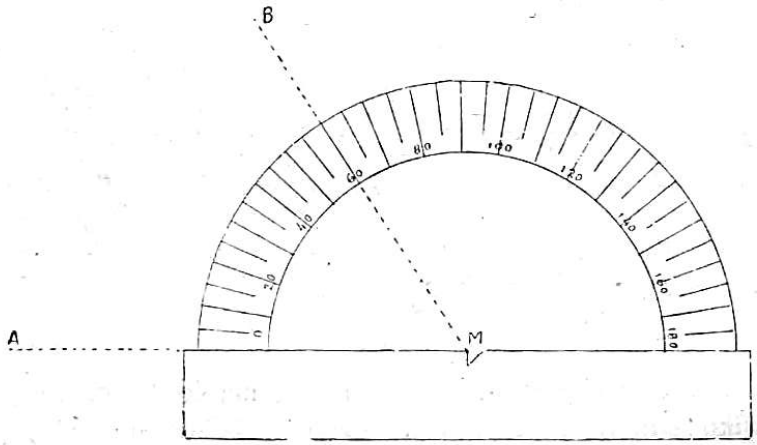
2. Nacrtaj kut i izmjeri ga; zatim u njegovu vrhu nacrtaj okomice i izmjeri dobiveni kut.

3. Nacrtaj kut i izmjeri ga; unutar kuta uzmi jednu točku i spusti na krakove okomice. Izmjeri kut, komu je vrh u onoj točki. Zbroji oba kuta.

4. Primjer treći izvedi na nekoliko različnih kutova i isporedi rezultate.

5. Na kružnici odaberi dvije točke, spoji ih sa središtem i izmjeri dobiveni kut. Zatim spoji iste dvije točke s jednom trećom točkom na kružnici, izmjeri i taj kut i isporedi ga s kutom na središtu.

6. Na kružnici odaberi dvije točke A i B. Uzmi za tim na kružnici još i druge točke $C, D, E \ldots$ i spoji svaku od njih sa A i B. Izmjeri tako dobivene kutove i isporedi njihovu veličinu.



Sl. 33.

7. Nacrtaj kut od 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 120^0, 135^0, 160^0.

8. Zbroji kutove: *a*). $45^0 + 60^0$ *b*). $20^0 + 30^0 + 40^0$ *c*). $50^0 + 60^0 + 25^0$, (konstrukcijom).

9. Konstruiraj razliku kutova: *a*). $60^0 - 15^0$ *b*). $120^0 - 80^0$ *c*). $80^0 - 45^0$.

10. Podijeli pun kut i njemu pripadni krug na 5, 6, 8, 10 dijelova s pomoću kutomjera i dobivene točke na krugu spoji dužinama.

11. Za koliko se stupanja okrene mala kazaljka na uri u 1 sat, 2, 3 . . . i t. d. sata?

12. Kolik kut čine kazaljke na uri u 1, 2 . . . sati?

13. Nacrtaj ružu vjetrova.

14. Za koliko se stupanja mora da okrenem, ako gledajući prema sjeveru hoću da gledam, prema sjeveroistoku, istoku i t. d.?

15. Za koliko se stupanja okrenuo vjetar, ako je od juga prešao u sjeveroistok (preko istoka)?

16. Brod je promijenio kurz iz NE u ESE; za koliko se stupnjeva okrenuo;

17. Iz broda se vidi svjetionik A za 25^0 a svjetionik B za 45^0 od sjevera prema istoku. Kolik kut čine zrake iz točke broda prema svjetionicima. Nacrtaj, izmjeri i izračunaj traženi kut.

18. Nacrtaj bilo kakav kut, produži mu krakove preko vrha. Na taj si način dobio četiri kuta: dva šiljasta i dva tupa. Par šiljastih i par tupih nazivamo vršnim kutovima. Pokaži mjerenjem, da su vršni kutovi jednaki.

19. Nacrtaj bilo kakov kut i produži mu jedan krak preko vrha. Dobio si dva kuta, koja zovemo sukutima. Pokaži mjerenjem, da dva sukuta imaju uvijek zajedno 180^0.

20. Kakav je kut, koji je sukut pravoga kuta?

21. Krajeve bilo kojeg dijametra spoji s bilo kojom točkom na krugu. Kut, komu je vrh ona točka na krugu, jest pravi i zove se polukružni kut. Ponovi ovu zadaću za jedan te isti dijametar ali za različite točke na kružnici. Isto tako ponovi zadaću za različite dijametre.

§ 11. Paralelne ravnine i pravci.

1. Promatrajmo model kocke. Osim ravnina, koje se sijeku i s kojima smo se bavili prije, imamo na kocki još i ravnina, koje se ne sijeku. Takovih ravnina imamo na kocki tri para. Za svake dvije ravnine jednoga para kažemo da su paralelne.

Takov isti položaj ravnina naći ćeš na svakom paralelepipedu na pr. među ravninama sobe. I tu ćeš naći tri para paralelnih ravnina.

Promatrajmo jedan par takovih ravnina: pod i strop. Strop je na svakom mjestu jednako daleko od poda, a ostat će to i onda, ako sebi ravninu poda i ravninu stropa zamisliš produljenu u druge sobe, koje su uz tvoju.

Paralelne ravnine ostaju uvijek jednako daleko jedna od druge, one se nigdje ne sijeku.

2. I među bridovima kocke ima ih, koji se ne sijeku. Dvanaest bridova kocke možemo podijeliti u tri grupe po četiri brida, koja se ne sijeku. Za te bridove kažemo također, da su paralelni.

To, što je rečeno za bridove kocke, može se riječ po riječ ponoviti za bridove na pr. školske sobe. Ako sebi takova dva paralelna brida zamisliš produljena u druge sobe, vidjet ćeš, da ostaju uvijek jedan od drugog jednako daleko, da se dakle nigdje ne sijeku.

Dva su paralelna pravca uvijek jednako daleko jedan od drugog, oni se ne sijeku nigdje.

Dalji primjeri paralelnih pravaca: krajevi ravne ceste, željezničke tračnice, gdje željeznica ne zavija i t. d.

Dva paralelna pravca leže uvijek u istoj ravnini. To svojstvo ne ćeš moći potvrditi neposredno na modelu kocke ili na sobi, jer sve ravnine, koje idu paralelnim pravcima nijesu tu napravljene, ali ih lako možeš zamisliti.

3. Za crtanje paralelnih pravaca služe nam oni isti modeli trokuta, koje upotrebljavamo i za crtanje okomica.

Da nacrtaš pravce s nekim zadanim pravcem paralelne, postupaš ovako:

Jednu stranicu trokuta postaviš uz zadani pravac tako, da se ona s njim podudara. Sada prisloniš ravnalo na jednu od onih drugih dviju stranica i ravnalo čvrsto držiš, da se ne miče. Iza toga pomičeš trokut tako, da se skliže po ravnalu i olovkom vučeš pravce uvijek uz onu stranicu, koja se na početku podudarala sa zadanim pravcem. Na taj način možeš sa zadanim pravcem povući toliko paralelnih pravaca, koliko te volja.

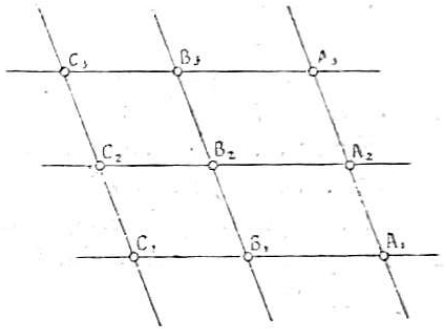
4. Svi pravci u ravnini, koji su paralelni sa zadanim jednim pravcem, čine jedan pramen paralelnih pravaca.

Zrake sunčane svjetlosti, koje padaju kroz prozor u sobu, paralelne su. Ali ne samo da su one zrake, koje padaju tebi u sobu, paralelne među sobom, već su one paralelne i sa svim zrakama, koje padaju makar komu u sobu u onaj čas. Zrake sunčane svjetlosti, koje griju i osvjetljuju našu zemlju, paralelne su. Dalekozori svih astronoma, koji u isti čas promatraju jednu te istu zvijezdu, jesu paralelni.

5. Način kretanja, kojim se kreće trokut, kada crtaš pravce jednog paralelnog pramena, zove se **paralelno pomicanje.**

Pravci jednog paralelnog pramena prelaze jedni u druge paralelnim pomicanjem.

Ravnalo, koje je kod tog pomicanja ostalo čvrsto, daje nam smjer toga pomicanja. Svaka točka trokuta opisuje kod toga pomicanja pravac u smjeru pomicanja i svaka točka opiše put iste dužine (slika 34.).



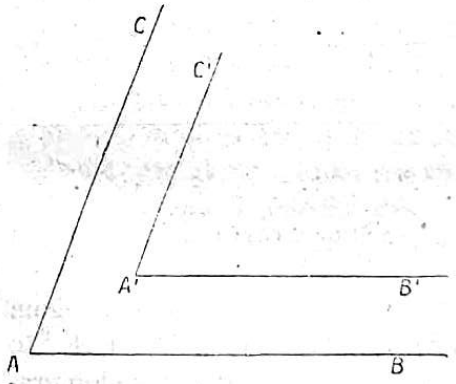
Sl. 34.

Paralelno se pomiče poklopac tvoje pernice, kada je otvoraš ili zatvoraš; isto se tako kod otvoranja ili zatvoranja paralelno pomiču ladice stolova, ormara i t. d.

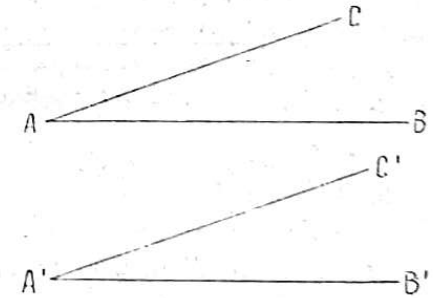
Navedi još nekoliko primjera paralelnog pomicanja.

Izvodi i sam na tvom stolu ili podu sobe takovo paralelno pomicanje.

Zadaća. Na zadani pravac nacrtaj više okomica i pokaži, da sve okomice na zadani pravac čine pramen paralelnih pravaca.



Sl. 35.



Sl. 36.

6. **Osnovna zadaća:** Točkom A izvan pravca nacrtaj paralelu sa zadanim pravcem p.

Jednu stranicu trokuta postavi uz pravac p.

Ravnalo prisloni čvrsto uz bilo koju drugu stranicu trokuta i trokut pomiči dotle, dok zadana točka A ne padne na onu

stranicu, koja se na početku podudarala s pravcem p. Sada olovkom povučeš pravac, koji će biti paralelan s pravcem p.

Budući da tom točkom ide samo jedan pravac zadanoga smjera, izlazi odatle ova važna istina:

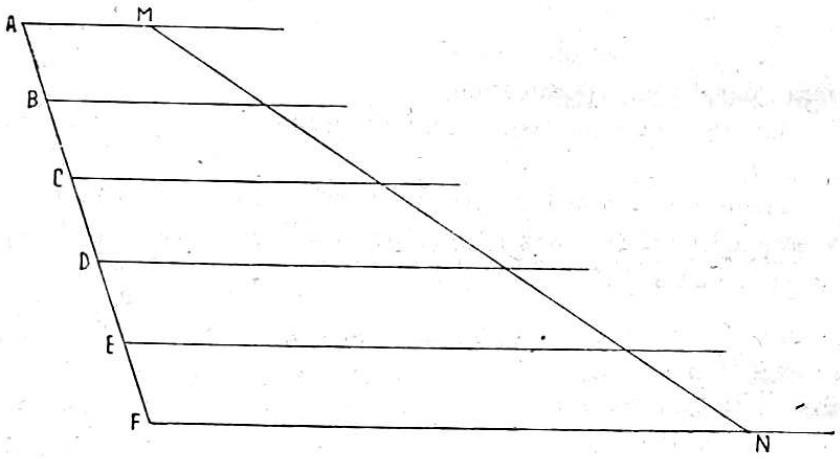
Svakom točkom ravnine možemo sa zadanim pravcem povući jednu paralelu i samo jednu.

7. Nacrtaj dva kuta, kojima su krakovi paralelni u istom smjeru (slika 35. i 36.).

Paralelnim pomakom u smjeru AA' doći će jedan od tih kutova na drugi. Dakle:

Kutovi, kojima su krakovi paralelni u istom smjeru, jesu jednaki.

Primjeri. 1. Nacrtaj dva paralelna pravca, koja će biti 20 mm jedan od drugog daleko.



Sl. 36 a.

2. Nacrtaj „od oka" dva praralelna pravca, i ispitaj, jesu li doista paralelni?

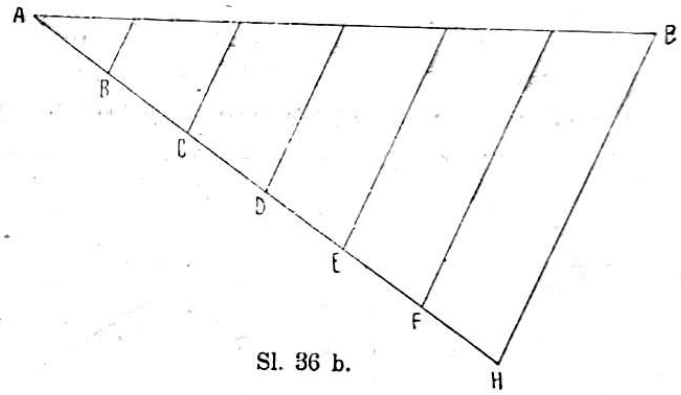
3. Zadanom točkom A povuci tri ili više pravaca. Drugom jednom točkom B nacrtaj paralele s pravcima kroz točku A. Što će se dogoditi, ako točku A pomakneš u točku B tako, da jedan pravac pramena A padne na pravac, koji je s njim paralelan u točki B?

4. Nacrtaj pramen paralelnih pravaca i presijeci ga drugim pramenom paralelnih pravaca, pod kutom od *a)*. 45° *b)*. 60° *c)*. 90°. Što se može reći o kutovima, koji su tako nastali?

5. Koliko pravaca jednog pramena paralelâ ide svakom točkom ravnine?

6. (Dijeljenje dužine). Iz točke A (slika 36a) povuci bilo kakovu zraku i nanesi na njoj koliko hoćeš, na pr. 5, dužina, koje su sve jednake sa AB. Točkama, A, B, C, D, E, F, povuci paralele u kojem hoćeš smjeru. Ako sada među te paralele postaviš bilo koju dužinu na pr. MN tako, da joj je jedan kraj na jednoj a drugi na drugoj skrajnoj paraleli, bit će dužina MN podijeljena na 5 jednakih dijelova.

Ako imaš sada podijeliti zadanu dužinu AB na koliko hoćeš dijelova na pr. na 6. povući ćeš iz jednog kraja A te dužine zraku



Sl. 36 b.

AH i na njoj ćeš nanijeti počevši od točke A 6 jednakih dijelova. Krajnju točku H šestog dijela spojit ćeš sa drugim krajem dužine AB i svim ćeš djelištima povući paralele sa HB. Te paralele dijele dužinu AB na 6 jednakih dijelova. (Slika 36b).

7. Podijeli kakovu god dužinu AB na 3, 4, 5 . . . dijelova.

8. Crte su u tvojoj bilježnici paralelne i jednako su jedna od druge razmaknute. Kako ćeš s pomoću tih crta podijeliti dužinu $AB = 5$ cm na 3 jednaka dijela.

9. Podijeli isto tako dužinu od 10 cm na 7 dijelova.

II. Svojstva jednostavnih ravnih likova.

§ 12. Kvadrat i pravokutnik.

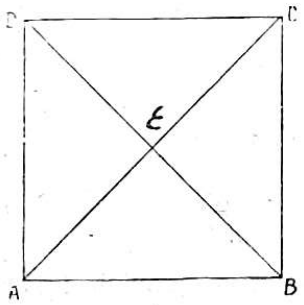
1. Plohe, kojima je omeđena kocka, sve su jednake i imaju oblik, koko ga pokazuje slika 37. Likovi nacrtani na ravnu papiru, tabli, ili bilo na kojoj ravnini jesu ravni likovi. Lik u slici 37. zove se **kvadrat.** Kocka je omeđena samim kvadratima.

Svaki je kvadrat omeđen sa 4 dužine, koje se zovu stranice. Uvjeri se mjerenjem, da su sve stranice kvadrata jednake.

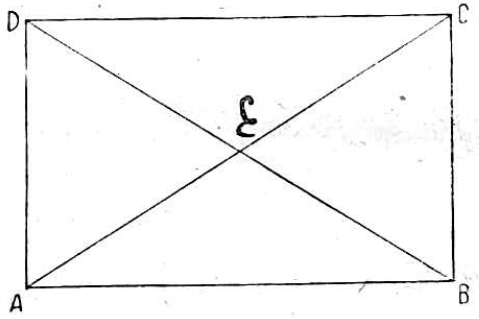
U kvadratu imamo 4 prava kuta. Vrhovi tih kutova zovu se vrhovi kvadrata.

Ako spojimo pravcima po dva vrha u kvadratu, koja ne leže na istoj stranici, dobit ćemo dužine, koje se zovu dijagonale kvadrata. Kvadrat ima dvije dijagonale AC i BD; uvjeri se mjerenjem, da su dijagonale kvadrata jednake i da stoje jedna na drugoj okomito, kao i to, da jedna drugu dijeli u dva jednaka dijela.

2. Kvadrat ćeš nacrtati ovako. Nacrtaj dužinu AB, točkama A i B povuci okomice AB, a na tim okomicama uzmi dužine AC i BD, koje su jednake sa AB. To se može učiniti šestarom ili mjerilom ili, što je još najjednostavnije, s pomoću



Sl. 37.



Sl, 38.

komadića papira s ravnim rubom. Papir se postavi uz stranicu AB i na rubu papira olovkom se zabilježe točke A i B. Sada se papir postavi redom na jednu i drugu okomicu tako, da jedna točka, zabilježena na papiru dođe na točku A, onda nam druga daje točku C.

3. Školska tabla, staklene ploče na prozorima, slike i mnogi drugi predmeti imadu također četiri prava kuta, ali stranice nijesu više sve jednake kao kod kvadrata. Ti predmeti imadu oblik, koji nam je predočen likom u slici 38. a zove se pravokutnik.

Pravokutnike susrećeš svuda u okolini, nađi ih i izmjeri im stranice.

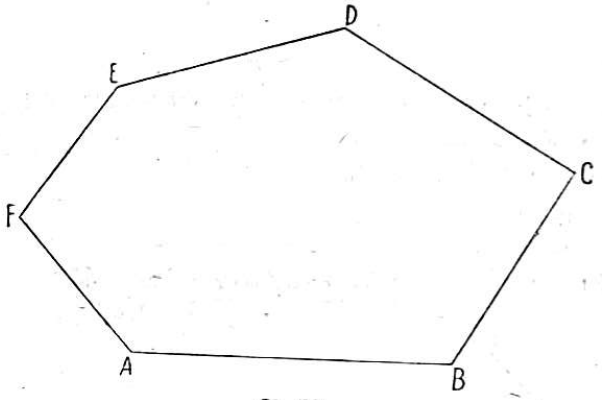
Uvjeri se mjerenjem o tom, da su u pravokutniku dvije po dvije suprotne stranice jednake; dalje se uvjeri, da su i dijagonale u pravokutniku jednake, ali okomite nijesu kao kod kvadrata. Pokaži još, da dijagonale dijele jedna drugu na dva jednaka dijela.

4. Nacrtaj pravokutnik.

5. Pravokutnik ima dužinu AB ili CD; širinu AC ili BD. To se drukčije kaže: pravokutnik ima dvije dimenzije: dužinu i širinu ili osnovicu (bazu) i visinu.

Kada dimenzije pravokutnika postanu jednake, pravokutnik prelazi u kvadrat.

Bilješka. Pravokutnik, kvadrat, krug jesu ravni likovi. Pravokutnik i kvadrat omeđeni su dijelovima pravca, dužinama, a krug to nije. Dio ravnine, koji je omeđen samim dužinama, zove se mnogokut ili poligon (slika 39.). Dužine AB, BC ...



Sl. 39.

zovu se stranice mnogokuta; točke A, B, C... njegovi vrhovi. Mnogokut ima toliko stranica, koliko vrhova; ako ima tri, zove se trokut, ako ima četiri, četverokut i t. d. Kvadrat i pravokutnik jesu dakle četverokuti.

Primjeri. 1. Nacrtaj kvadrat, komu je stranica 8 cm, 6 cm, 4 cm, 2 cm.

2. Nacrtaj pravokutnik sa stranicama *a)*. 5 cm i 4 cm; *b)*. 6 cm i 3·5 cm.

3. Nacrtaj s 1000 puta umanjenim stranicama gradilište koje ima oblik pravokutnika, komu su stranice 80 m i 50 m.

4. Izmjeri dužinu i širinu sobe i nacrtaj joj tlocrt sa 100 puta umanjenim stranicama.

5. Nacrtaj kvadrat i izreži ga, pa savijanjem papira pokaži svojstva kvadrata.

6. Nacrtaj krug i u njemu dva okomita promjera. Krajeve im spoji dužinama. Što si dobio?

7. Nacrtaj sada kvadrat, ako mu je zadana dijagonala 6 cm, 4 cm, 2 cm.

8. Nacrtaj kvadrat i kružnicu, koja ide njegovim vrhovima (opisana kružnica).

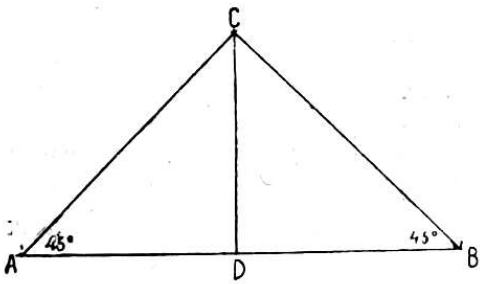
9. Nacrtaj kružnicu i u njoj dva bilo koja dijametra, pa im spoji krajeve. Što si dobio?

10. Nacrtaj sada pravokutnik, ako mu najprije nacrtaš dijagonale.

11. Opiši kružnicu oko pravokutnika.

§ 13. Trokut.

1. Dijagonala dijeli kvadrat u dva trokuta. Svaki takav trokut ima jedan kut pravi, zato se zove pravokutan trokut; druga dva kuta jesu jednaka i svaki je polovina pravog; svaki ima 45°. Takav trokut ima i dvije stranice jednake. Trokuti, koji imadu jednake dvije stranice, zovu se istokračni trokuti. Trokuti dakle, koje dobijemo, kad u kvadratu povučemo dijagonalu, jesu istokračni pravokutni trokuti (slika 40.).



Sl. 40.

Modelom takova trokuta služimo se kod crtanja, kako smo to već mnogo puta vidjeli. S pomoću takova modela možemo osim pravog kuta nacrtati još i kut od 45°, možemo dakle pravi kut raspoloviti.

Stranica u pravokutnom trokutu, koja leži nasuprot pravom kutu, zove se hipotenuza. One druge dvije, koje čine krakove pravog kuta, zovu se katete. Hipotenuza je u pravokutnom trokutu uvijek najveća stranica.

Istokračan pravokutan trokut ima jednake katete.

Svaki trokut, komu su oba kuta uz jednu stranicu jednaka i imaju 45°, jest istokračan pravokutan trokut. Prema tomu možemo s pomoću modela istokračna pravokutna trokuta nacrtati svaki takav trokut, ako mu se zada dužina katete ili dužina hipotenuze; a može se nacrtati i kvadrat, komu je zadana dijagonala.

Ako u bilo kojem trokutu iz jednoga njegova vrha spustimo okomicu na suprotnu stranicu, to se dužina te okomice zove visina trokuta; stranica, na koju je okomica spuštena zove se osnovica ili baza trokuta. Svaka stranica može da bude baza trokuta; prema tomu ima trokut i tri visine.

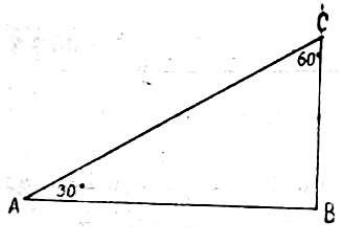
Istokračni pravokutni trokut dijeli visina, koja pripada hipotenuzi, na dva isto takova trokuta.

2. Dijagonala dijeli svaki pravokutnik na dva pravokutna trokuta; stranice pravokutnika jesu katete a dijagonala hipotenuza toga pravokutnog trokuta.

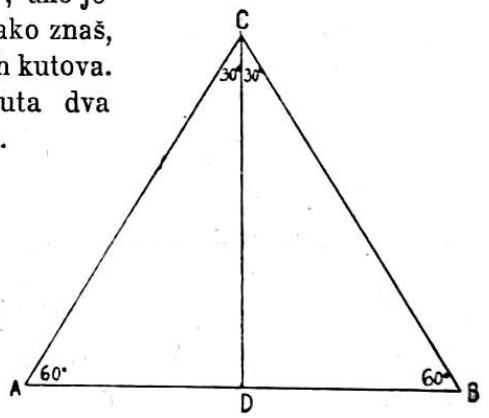
Kod crtanja služimo se još jednim modelom pravokutnog trokuta, u kome kosi kutovi imaju 60° i 30° (slika 41.). Tim modelom možemo osim pravog kuta nacrtati brzo još i kutove od 60° i 30°.

Tim modelom možeš također lako da nacrtaš bilo koji takov trokut s kutovima od 60° i 30°, ako je zadana samo jedna stranica i ako znaš, gdje imaju da budu vrhovi onih kutova.

Hipotenuza takova trokuta dva puta je veća od manje katete.



Sl. 41.



Sl. 42.

3. Nacrtaj s pomoću modela dva pravokutna trokuta s kutovima od 60° i 30° tako, da se oni podudaraju u većoj kateti (slika 42.).

Ta dva trokuta daju skupa trokut ABC, koji ima jednake sve tri stranice i zove se istostran trokut. I sva tri kuta njegova jesu jednaka. Koliko stupnjeva ima svaki?

S pomoću modela s kutovimu od 60° i 30° možeš nacrtati istostran trokut, komu se zadaje stranica ili visina.

Uvjeri se mjerenjem, da su sve tri visine u istostranom trokutu jednake.

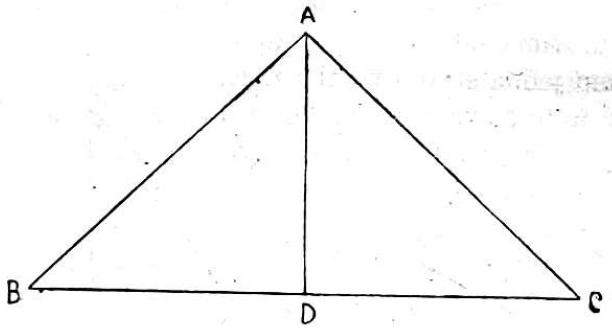
4. Nacrtaj bilo kakov kut i na krakovima mu odmjeri jednake dužine; krajnje točke spoji opet dužinom pa ćeš dobiti trokut s dvije jednake stranice, dakle istokračan trokut (slika 43.). Dvije stranice istokračna trokuta, koje su jednake, zvat ćemo njegovim krakovima, treću ćemo zvati njegovom osnovicom (bazom); pod visinom istokračna trokuta razumijevat ćemo naprosto onu visinu, koja pripada osnovici.

Visina dijeli kut na vrhu, osnovicu, i čitavi istokračan trokut na dva jednaka dijela. Uvjeri se o tom mjerenjem.

Prema tomu možemo sada s pomoću modela pravog kuta svaki kut i svaku dužinu podijeiiti na dva jednaka dijela.

[Uvjeri se o tom, da su kutovi uz bazu istokračna trokuta jednaki.

Primjeri. S pomoću modela riješi zadaće 1. do 10.



Sl. 43.

1. Nacrtaj istokračan pravokutan trokut, ako mu je kateta: *a).* 3 cm, *b).* 4·5 cm, *c).* 2·8.

2. Nacrtaj istokračan pravokutan trokut, ako mu je hipotenuza: *a).* 4 cm *b).* 4·8 cm *c).* 5·6 cm.

3. Nacrtaj kvadrat, komu je dijagonala: *a).* 5 cm *b).* 4·5 cm *c).* 6·2 cm.

4. Nacrtaj pravokutan trokut, komu je *a)* kateta 4 cm i kut uz nju 30° *b)* kateta 3·5 cm i kut uz nju 60°.

5. Nacrtaj pravokutan trokut, kome je hipotenuza 5 cm dva puta veća od manje katete.

6. Nacrtaj pravokutnik, kome je dijagonala 5·6 cm dva puta veća od manje stranice.

7. Nacrtaj istostran trokut, kome je stranica *a).* 3 cm *b).* 5·2 cm *c).* 5·4 cm.

8. Nacrtaj istostran trokut, kome je visina *a).* 3·8 cm. *b).* 5·2 cm *c).* 6 cm.

9. Nacrtaj bilo kakav kut i raspolovi ga.

10. Nacrtaj bilo kakovu dužinu i raspolovi je.

11. Nacrtaj istokračan trokut, komu je kut na vrhu 70° a krak 4 cm. Izmjeri bazu i kutove uz nju?

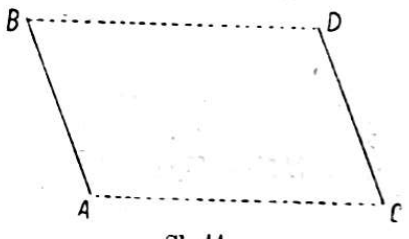
12. Nacrtaj istokračan trokut, kome je baza 3·6 cm i kutovi uz nju 50°. Izmjeri visinu, krakove i kut na vrhu.

13. Nacrtaj istokračan trokut, komu je kut na vrhu 120° a visina 3 cm. Izmjeri krakove, bazu i kutove uz bazu.

14. Nacrtaj istokračan trokut, komu se zadaje baza 4 cm i visina 5 cm. Izmjeri krakove i kutove.

§ 14. Paralelogram.

1. Ako se dužina AB pomiče paralelno i dodje u položa CD, bit će put AC, što ga prevali točka A jednak putu BD, što ga prevali točka B, uza to je još i AC paralelno sa BD. Isto je tako AB jednako i paralelno sa CD. Četverokut $ABCD$ ima dakle dvije po dvije suprotne stranice jednake i paralelne. Takov se četverokut zove paralelogram (slika 44.).



Sl. 44.

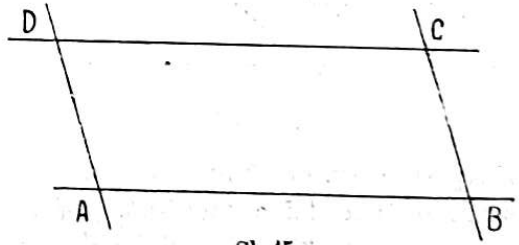
Da se nacrta paralelogram, dovoljno je da dva pravca jednog paralelnog pramena presiječemo sa dva pravca drugog (slika 45.).

2. Kvadrat i pravokutnik jesu također paralelogrami.

3. Uvjeri se mjerenjem, da dijagonale paralelograma jedna drugu dijele na dva jednaka dijela.

Primjeri. 1. Nacrtaj paralelogram, kome su stranice 5 cm. i 3 cm a zatvoraju kut od 60°.

2. Nacrtaj paralelogram, kome su sve stranice 4 cm a sijeku se pod kutom od 120°. Kakovi su trokuti, na koje dijagonale dijele taj paralelogram?



Sl. 45.

§ 15. Zbroj kutova u trokutu i četverokutu.

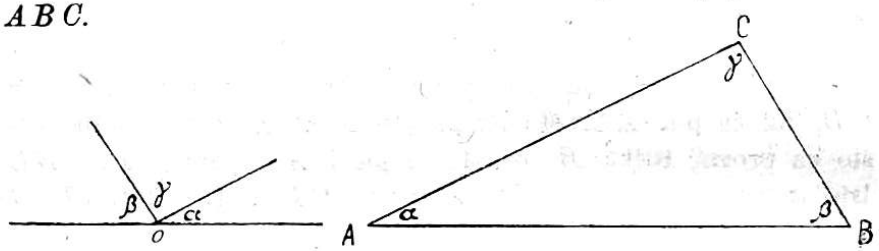
1. Kolik je zbroj svih kutova u kvadratu i pravokutniku?

Kolik je zbroj svih kutova na modelima trokuta, koji nam služe kod crtanja?

Nacrtaj kakovgod trokut, izmjeri mu transporterom kutove i izračunaj njihov zbroj.

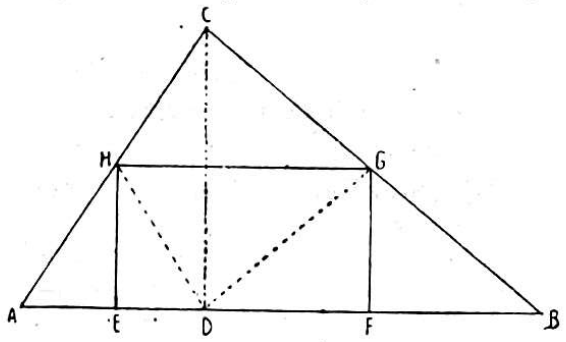
2. Zadan je trokut ABC (slika 46.) i jedna točka O. Kroz tu točku nacrtamo paralele s njegovim stranicama, pa dobijemo njegove kutove poređane oko vrha O, kako je pokazano na slici, iz koje se razabira, da je zbroj svih kutova trokuta jednak sa dva prava kuta.

Načini iz papira trokut, odreži mu kutove i složi ih onako, kako je to naznačeno na slici 46. Uzmi opet iz papira trokut ABC.



Sl. 46.

Savini papir tako, da nastane rub CD okomit na AB. Savini sada redom vrhove tako da svi padnu u D i da nastane pravokutnik $EFGH$ pa ćeš vidjeti, da zbroj kutova kod A, B i C čini dva prava kuta (slika 47.). Odatle slijedi ova temeljna istina:



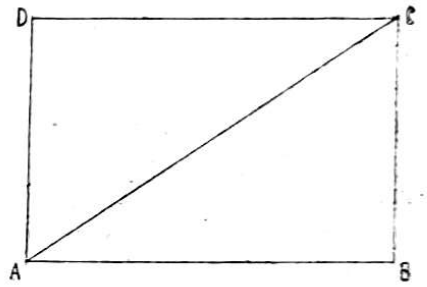
Sl. 47.

Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je sa dva prava kuta.

3. Do te važne istine možemo još i ovako doći. Zbroj svih kutova u pravokutniku jednak je sa četiri prava kuta. Iz (slike 48) se razabira, da je zbroj kutova u pravokutnim trokutima ABC i CAD jednak, na svaki otpada dakle polovina. Prema tomu je zbroj kutova u pravokutnu trokutu jednak sa dva prava.

Iz slike se 48. razabira još i to, da dva kosa kuta u pravokutnom trokutu čine pravi kut.

Uzmimo sada kakovgod trokut ABC i iz vrha C spustimo na AB visinu. Iz slike 49. se vidi, da taj trokut sastoji od dva pravokutna trokuta, koji zajedno imaju četiri prava kuta kao zbroj; ali oba prava kuta ADC i BDC ne pripadaju trokutu ABC. Odbijemo li ih, ostanu dva prava kuta kao zbroj kutova u trokutu ABC.



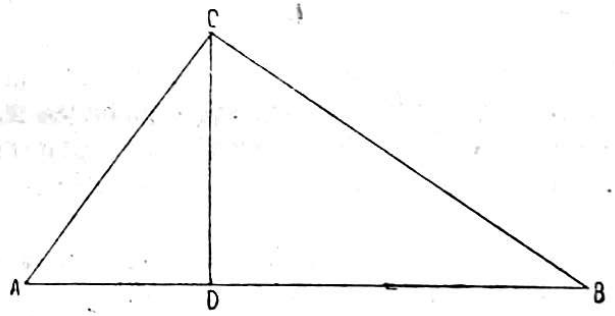
Sl. 48.

4. Svaki se četverokut dade razdijeliti dijagonalom na dva trokuta. A kako je zbroj kutova u trokutu jednak sa dva prava, bit će zbroj kutova u svakom četverokutu jednak sa četiri prava kuta.

Primjeri. 1. U pravokutnu trokutu je jedan kosi kut 50^0; kolik je drugi?

2. Mijenjaj zadani kosi kut iz primjera 1. tako, da mu pribrojiš ili odbiješ 1^0; kako se mijenja drugi kosi kut?

3. U istokračnu trokutu ima kut na vrhu 120^0; koliki su kutovi kod osnovice. Neka kut na vrhu biva manji svaki put za 2^0. Kako se kod toga mijenjaju kutovi uz osnovicu?



Sl. 49.

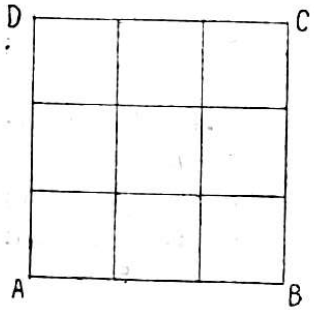
4. U trokutu su dva kuta 50^0 i 70^0; kolik je treći? Kako se mijenja treći kut, ako oba zadana kuta zajedno rastu ili padaju svaki za 1^0? Kako se mijenja treći kut, ako jedan od zadanih kutova raste svaki put za 1^0 a drugi za isto toliko pada?

III. Primjena metričkog sustava mjerâ.

§. 16. Ploština kvadrata i pravokutnika.

1. Početak nauka o prostoru ima se tražiti u mjerenju zemljišta, polja. Ta je vještina bila već dobro razvita kod starih Egipćana. Rijeka Nil je svojim glasovitim poplavama svake godine potpuno razorila i pomrsila sve granice na poljima. Kada je voda opala, trebalo je svakom vlasniku da nađe položaj svoga polja i njegovu veličinu; a bez poznavanja početka nauke o prostoru ne bi to bilo moguće.

2. Da se može odrediti veličina površine ili ploština bilo kakova ravna lika moramo prije svega odabrati jedinicu, kojom ćemo ploštinu mjeriti, a ta jedinica mora i sama da bude ploština. U nas je za mjerenje ploština zakonom određena jedinica kvadratni metar (m^2), njegovi mnogokratnici i dijelovi.



Sl. 50.

Da se dakle odredi ploština ravna lika, ima se ispitati, koliko se puta jedinica ploštine nahodi u liku.

3. Neka se na pr. ima odrediti ploština kvadrata, komu stranica ima 3 cm. Ako stranice kvadrata podijelimo na 3 dijela i djelištima povučemo paralele, bit će kvadrat podijeljen na 9 malih kvadrata s ploštinom 1 cm^2. Zadani kvadrat ima dakle 9 cm^2 ploštine (slika 50.).

Kad bi stranica kvadrata imala 4 dm; bila bi mu ploština 16 dm^2; ploština kvadrata sa stranicom 5 m bit će 25 m^2.

Odavle dobivamo pravilo, mjerni broj ploštine kvadrata dobije se, ako se mjerni broj stranice pomnoži sam sobom.

Bilješka. Na mjesto „mjerni broj ploštine, stranice i t. d.“ govori se na prosto „ploština, stranica i t. d.“

4. Pravilo za ploštinu kvadrata vrijedi i onda, ako stranica nije zadana u cijelim brojevima.

Neka je na pr. stranica kvadrata $2\frac{1}{4}$ cm $= \frac{9}{4}$ cm. Tada je jedinica ploštine kvadrat, komu je stranica $\frac{1}{4}$ cm a ploština $\frac{1}{16}$ cm^2. Stranica zadana kvadrata ima 9 jedinica po $\frac{1}{4}$ cm^2, prema tomu ima njegova ploština 81 jedinicu po $\frac{1}{16}$ cm^2, što čini $\frac{81}{16}$ $cm^2 = \frac{9}{4} . \frac{9}{4}$ cm^2.

Ako stranica kvadrata ima na pr. 2·5 cm, uzmemo kao jedinicu dužine 1 mm; prema tomu će biti ploština $25 \cdot 25$ $mm^2 = 625$ $mm^2 = 6 \cdot 25$ cm^2.

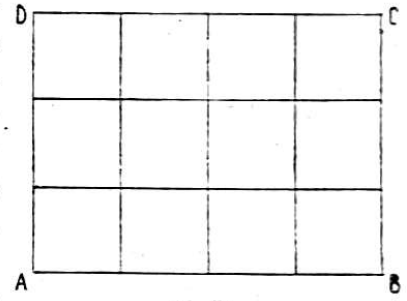
5. Neka se odredi ploština pravokutnika, komu je dužina 4 cm a širina 3 cm.

Dužinu razdijelimo na 4 a širinu na 3 dijela. Djelištima povučemo paralele i time podijelimo pravokutnik na 12 kvadrata s ploštinom 1 cm^2. Zadani pravokutnik ima dakle 12 cm^2 ploštine. (Slika 51.). Odatle slijedi pravilo:

Ploština pravokutnika dobije se, ako se dužina pomnoži sa širinom.

To pravilo vrijedi i onda, ako stranice nijesu zadane u cijelim brojevima; na pr. dužina $5\frac{2}{3}$ cm $= \frac{17}{3}$ cm a širina $3\frac{1}{2}$ cm $= \frac{7}{2}$ cm.

Ploština se može izračunati ovako. Zamislimo, da smo razlomke sveli na zajednički nazivnik, tada ima dužina $\frac{34}{6}$ cm a širina $\frac{21}{6}$ cm. Jedinica dužine je tada $\frac{1}{6}$ cm^2 a jedinica ploštine $\frac{1}{36}$ cm^2. Dužina ima 34 a širina 21 jedinicu, prema tomu ploština $34 \cdot 21 = 714$ jedinica od $\frac{1}{36}$ cm. Ploština pravokutnika bit će dakle $\frac{714}{26} = \frac{1\,16\,9}{6} = 19\frac{5}{6}$ cm^2.



Sl. 51.

Isto vrijedi, naravno i onda, ako su dužina i širina zadane u decimalnim razlomcima.

Primjeri. 1. Izračunaj ploštinu kvadrata, komu je stranica: 25 cm, 17 m, 4·5 dm, $2\frac{1}{2}$ m, $3\frac{1}{4}$ dm, $2\frac{3}{5}$ cm.

2. Pod sobe, koji ima oblik kvadrata stranice 6·25 m treba bojadisati. Koliko će stajati bojadisanje, ako se za m^2 plaća 48 f?

3. Koliko je stajao vrt, koji ima oblik kvadrata stranice 45·5 m, ako se za m^2 platilo 7·50 K?

4. Izračunaj ploštinu pravokutnika sa stranicama. *a)* 52·2 i 37·9, *b)* 78·5 i 52·6 m, *c)* 246·8 i 27·35 m.

5. Kvadrat ima stranicu 1·2 m dugu. Kolika mora biti širina pravokutniku, koji ima ploštinu jednaku s kvadratom i dužinu 2·25 m?

6. Gradilište u obliku pravokutnika dužine 65·72 m i širine 36·04 m prodalo se za 43·75 K po m^2. Što se dobilo za gradilište?

7. Pod sobe, koji ima oblik pravokutnika dužine 7·75 m i širine 5·72 m ima se bojadisati. Koliko će se platiti za bojadisanje, ako m^2 stoji 0·78 K?

8. U kući treba 28 staklenih ploča za prozore. Svaka ploča ima biti 13·5 cm visoka i 12·6 cm široka. Koliko će stajati posao, ako se za svaki m^2 skupa s radom plati 10·2 K?

9. Za gradilište u obliku pravokutnika dužine 57·68 m i širine 33·75 m platilo se 233604 K. Što je stajao kvadratni metar?

§ 17. Obujam kocke i pravokutnog paralelepipeda.

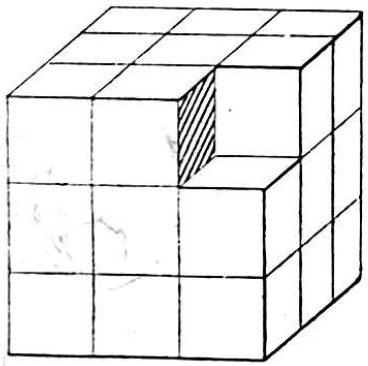
1. Da se odredi koliki prostor zaprema jedno tijelo, ili da se odredi veličina njegova obujma (volumena), moramo imati jedinicu, koja nam služi za mjerenje obujma. Ta se jedinica zove kubični metar (m^3). Kubični metar je kocka, kojoj je svaki brid dugačak 1 m.

Ako bridove kocke ili paralelepipeda mjerimo u dm ili cm, onda ćemo i obujam njihov izraziti u dm^3 ili cm^3.

Mjerni broj za obujam nekoga tijela bit će dakle broj, koji nam kazuje, koliko se puta jedinica obujma nalazi u prostoru, što ga zaprema ono tijelo.

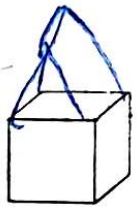
2. Da se odredi obujam kocke s bridom od 3 cm, postupa se ovako.

Povrh plohe, na kojoj kocka počiva i koja se zove njezina baza, odrežemo jednu vrstu, koja ima toliko cm^3 koliko baza ima cm^2, naime 3.3 cm^3. Tri takove vrste ispunit će čitavu kocku, koja će prema tomu imati $3.3.3\ cm^3 = 27\ cm^3$, (slika 52.).



Sl. 52.

3. Isto se tako može da odredi obujam pravokutna paralelepipeda, komu su dimenzije (dimenzije su: dužina, širina, visina) 5 cm, 4 cm, 3 cm.



Povrh baze odrežemo opet jednu vrstu, visoku 1 cm; ta vrsta ima toliko cm^3, koliko baza ima cm^2, naime $4·5 = 20\ cm^3$. Čitav paralelepiped ima 3 takove vrste, njegov je dakle obujam $5.\ 4.\ 3 = 60\ cm^3$. (Slika 53.).

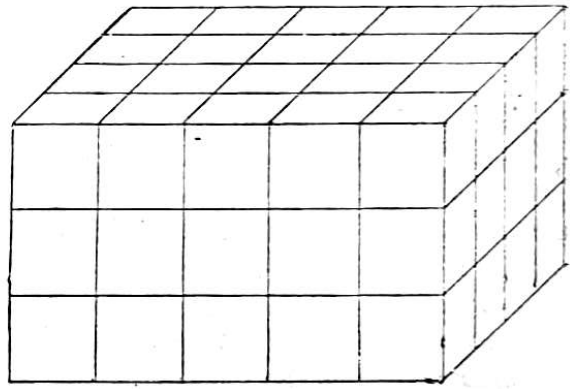
Ako su dimenzije paralelepipeda 3·2 cm, 5·1 cm, 4·7 cm, izrazit ćemo ih u mm: 32 mm, 51 mm, 47 mm. Obujam paralelepipeda bit će $32.\ 51.\ 47\ mm^3 = 76704\ mm^3$, što čini $76·704\ cm^3 = 3·2.\ 5·1.\ 4·7\ cm^3$. Dobivamo dakle pravilo:

Obujam pravokutna paralelepipeda dobije se, ako se pomnože njegove tri dimenzije.

Isto pravilo vrijedi naravno i za kocku, samo što su kod nje sve tri dimenzije jednake.

4. Ako nam je poznat obujam tijela, dobijemo odmah i njegovu težinu, samo ako znamo, koliko važe jedinica obujma (kolika je specifična težina tvari, od koje je tijelo napravljeno).

Ako su dimenzije tijela zadane u cm, dobivamo težinu u gramima; ako su zadane u dm, dobivamo težinu u kilogramima; ako su dimenzije zadane u metrima, dobijemo težinu u tonama. Zašto?



Sl. 53.

Primjeri. 1. Kolik je obujam kocke, kojoj je brid 5 cm, 8 dm, 10 m, 12·5 cm?

2. Koliko teži kocka od željeza, kojoj je brid 4 cm, 4 dm, 4 m, ako je specifična težina željeza 7·5 (t. j. cm^3 teži 7·5 gr; dm^3 teži 7·5 kg i t. d)?

3. Koliko kilograma teži m^3 vode, ako 1 dm^3 važe 1 kg? Koliko je težak m^3 uzduha, ako je uzduh 773 puta lakši od vode?

4. Izmjeri dimenzije sobe i odredi težinu uzduha u njoj, ako dm^3 uzduha teži $\frac{1}{773}$ kg?

5. Koliko je kg težak stup od mramora, kojemu je baza kvadrat sa stranicom od 32 cm, a visina stupa 4·75 cm; ako je specifična težina mramora 2·7?

6. Koliko se m^3 zemlje ima da iskopa, da se dobije jama dugačka 2 m, 1·5 m široka i 1·8 m duboka? Koliko teži iskopana zemlja, ako joj je specifična težina 2·1?

7. Greda ima oblik pravokutna paralelepipeda. Dugačka je 15·64 m, široka 0·3 m i debela 0·4 m. Koliko je teška greda, ako m^3 drva teži 525 kg?

IV. Simetrija.

§ 18. Simetrija prostornih tvorevina.

1. Uzmi ljusku orahovu i postavi je pred zrcalo. U zrcalu vidjet ćeš njenu sliku. Lako ćeš sada moći ljusku primaknuti zrcalu, tako da će ona sa svojom slikom za oko dati čitav orah. Ravnina zrcala dijeli sada ovaj prividni orah u dva dijela, koja imadu isti oblik i spram zrcala jednak položaj. Ali i pravi orah dade se isto tako jednom ravninom razdijeliti na dva dijela, koja imadu isti oblik, a svaki je dio kao slika drugoga dijela u ravnom zrcalu. Svako tijelo, koje se ravninom dade tako podijeliti na dva dijela, zovemo simetričnim tijelom.

Pokaži na predmetima okoline simetrična tjelesa i naznači, koja ih ravnina dijeli na dvije simetrične polovine, ili kako se to kraće kaže, naznači njihove ravnine simetrije. Gotovo svako djelo ljudske ruke jest simetrično. Ali ima i prirodnih tjelesa, koja su simetrična. Takova su tjelesa: ljudsko i životinjsko tijelo; lišće, cvijeće i t. d. Kamen na cesti redovno ne će biti simetričan; ako jest, onda slutimo, da ga je tako načinila ruka čovječja.

2. Velik dio predmeta tvoje okoline ima samo jednu ravninu simetrije, ali naći ćeš i takovih, koji imaju dvije i više ravnina simetrija. Stolovi, okviri slikā, knjige i t. d., jesu predmeti sa dvije ravnine simetrije. Pokaži te ravnine. Ali ne će ti biti teško naći i takovih predmeta, koji imadu vrlo mnogo ravnina simetrije. Takovi su predmeti na primjer čaše, boce, svijećnjaci i t. d.

3. I tjelesa, s kojima smo imali posla u nauci o prostoru, jesu simetrična. Sva ta tjelesa imadu više od jedne ravnine simetrije. Valjak, stožac i kugla imadu ih veoma mnogo. Dvije ravnine simetrije sijeku se u jednom pravcu, koji se zove os simetrije. Pravokutni paralelepiped ima tri osi simetrije, koje idu jednom točkom i stoje među sobom okomito. Pokaži os simetrije stola.

Jednom osju simetrije mogu da idu i više nego dvije ravnine simetrije. Šesterostrana uspravna prizma na primjer ima os simetrije, kroz koju ide šest ravnina simetrije. Pokaži to na olovki, koja redovno ima taj oblik.

4. Ako osju simetrije nekoga tijela ide bezbroj ravnina simetrije, onda se takovo tijelo zove rotaciono tijelo. Takova su tjelesa valjak, stožac, kugla i mnoga druga. Os simetrije zove se u tom slučaju os rotacije. Čaše, boce i mnoga druga tjelesa jesu tjelesa rotaciona. I naša zemlja je takovo rotaciono tijelo, i ona ima svoju os, oko koje se okrene jedamput u 24 sata. Kod kretanja zemlje oko sunca ostaje ta os uvijek u istom smjeru ili ona je uvijek sama sebi paralelna. Ima li stožac osim osi rotacije još koju os simetrije? Ima li valjak još koju os simetrije izim osi rotacije, koliko takovih osi ima i gdje one leže? Pokaži to isto za kuglu.

§ 19. Simetrija ravnih likova.

1. Nacrtaj mastilom na papiru makar kakav lik i prije nego se mastilo osuši, pritisni na nj bugačicu. Na bugačici dobit ćeš lik potpuno jednak s onim, što si ga na papiru bio nacrtao; ali, da zadani lik uzmogneš vidjeti i na bugačici moraš bugačicu okrenuti. Kada likove isporediš, vidjet ćeš, da je izgled otisnuta lika na bugačici drukčiji od onoga, što si ga na papiru nacrtao. Lik i njegov otisak na bugačici imadu izgled kao lik i njegova slika u zrcalu; oni su simetrični.

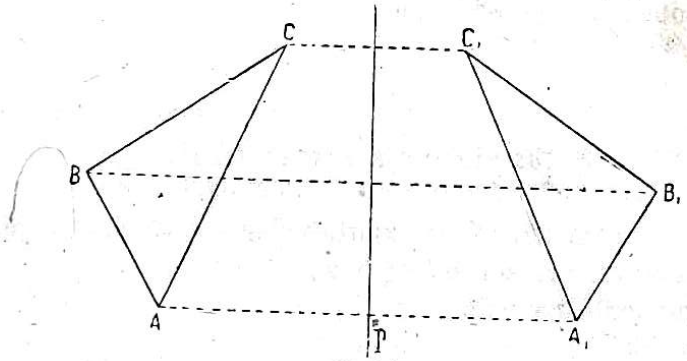
2. Nacrtaj na papiru krug i izreži ga, povuci mu jedan dijametar i škarama po tom dijametru krug prepolovi. Jednu polovinu kruga tako dobivena primakni zrcalu tako, da stoji na njemu okomito i da se dotiče zrcala po dijametru, u zrcalu ćeš dobiti drugu polovinu kruga, koja će s onom, što je u ruci držiš, dati potpuni krug. Krug je dakle simetričan lik. Ravnina zrcala je u tom slučaju njegova ravnina simetrije. I svaka druga ravnina, koja ide bilo kojim dijametrom kruga a stoji okomito na ravnini njegovoj, bit će njegovom ravninom simetrije.

3. Ali mi smo vikli, da kod promatranja ravnih likova pazimo samo na ono, što je u ravnini, dakle na ono, što možemo nacrtati, a ne marimo za ono, što se nalazi izvan te ravnine; za to kod simetrije ravnih likova i ne govorimo o ravnini simetrije, već govorimo samo o pravcu, u kom takova ravnina siječe ravninu lika. Taj ćemo pravac zvati osju simetrije ili simetralom ravna lika. Prema tomu kažemo: U krugu je svaki dijametar os simetrije ili svaki je dijametar simetrala kruga. Os simetrije dijeli ravni lik na dva simetrička dijela.

Osim kruga dadu se i mnogi drugi, nama već poznati, ravni likovi podijeliti na dva simetrična dijela. Pokaži to na pravokutniku, kvadratu, istokračnom trokutu.

Ravni simetrični likovi pokrivaju se posvema, kada jedan dio ravnine okrenemo oko osi simetrije, dok ne padne u drugi.

4. Previni list papira u dvoje i načini iglom tri točke na tako prevrnutom papiru. Odvini sada papir. Na papiru dobit ćeš



Sl. 54.

šest točaka sa svake strane ruba po tri. Za svaki par točaka, koji je nastao istim ubodom igle kažemo, da leži simetrično prema rubu. Spoji olovkom točke, koje leže s iste strane ruba, pa ćeš dobiti dva trokuta. Za ta dva trokuta kažemo, da su simetrična, a rub im je os simetrije.

Zadaća: Previni list papira i iglom označi makar koliko točaka na oba dijela papira; odmotaj papir, označi olovkom točke i os simetrije. Svake dvije simetrične točke spoji pravcem i gledaj, kako ti pravci stoje prema osi simetrije.

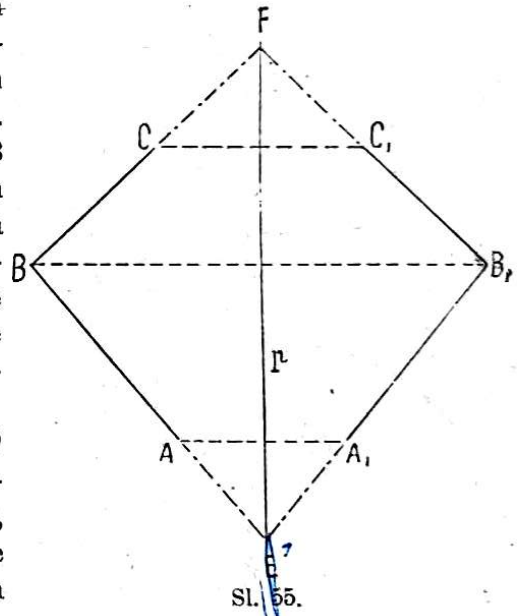
5. Da jednom ravnom liku, na primjer trokutu $A\,B\,C$ nacrtamo simetričan trokut $A'\,B'\,C'$, s obzirom na os simetrije p, postupamo ovako (slika 54.):

Iz svake točke A, B, C spustimo na pravac p okomicu, produljimo je i s druge strane pravca p nacrtamo točke A', B', C', koje su od pravca p baš toliko daleko kao i točke A, B, C.

Ako dvije dužine, koje leže simetrično prema pravcu p, produljiš, vidjet ćeš, da će se one sjeći na pravcu p, njihovoj osi simetrije (slika 55.).

§ 20. Osnovne konstrukcije.

1. Istostraničan trokut. Taj se lik dade vrlo jednostavno konstruirati šestarom i ravnalom. Nacrtaju se dva kruga s jednakim polumjerima, od kojih svaki ide središtem drugoga. Središta A i B daju sjednim predsjecištem C obaju krugova odmah istostraničan trokut $A\,B\,C$ (slika 56.). Istostraničan trokut ima 3 osi simetrije. Svaka od tih osi spaja jedan vrh trokuta sa središtem suprotne stranice. Sve tri osi sijeku se u jednoj točki, koja se zove središte istostranična trokuta (slika 57.).

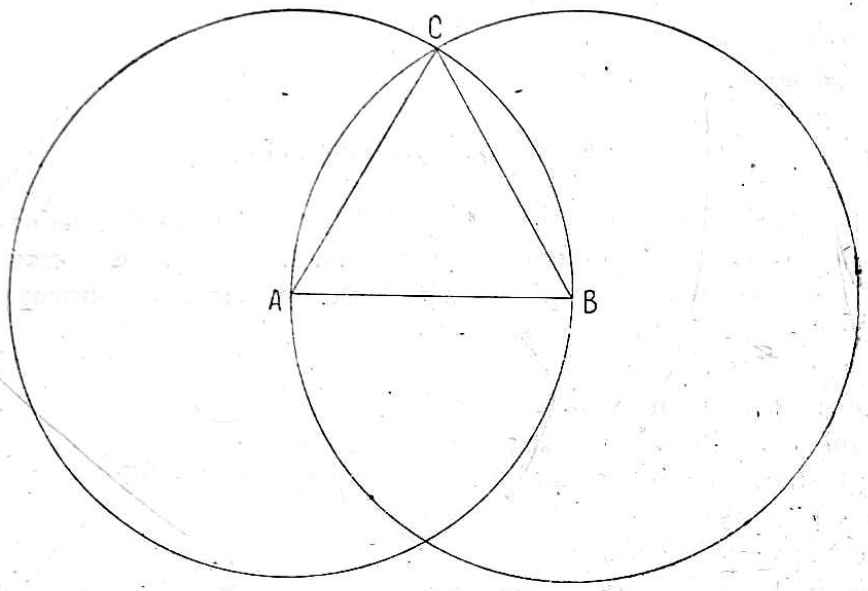


Sl. 55.

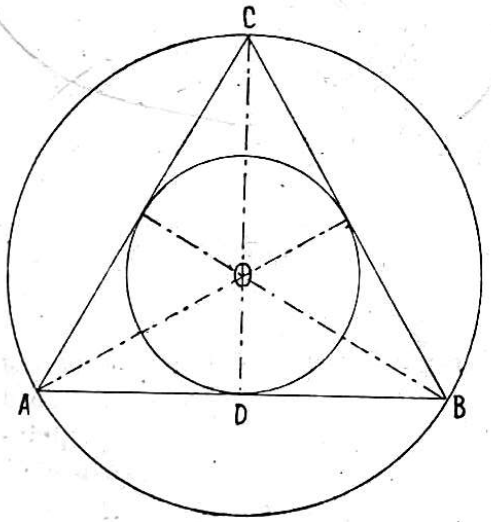
Ako oko središta O opišemo kružnicu s polumjerom $O\,C = O\,A = O\,B$, zove se ta kružnica, koja ide vrhovima trokuta, kružnica oko trokuta opisana. Naprotiv će se kružnica, koju opišemo oko središta O s polumjerom $O\,D$, doticati svih triju trokutovih stranica. Takova se kružnica zove kružnica u trokut upisana. Kod istostrana je trokuta polumjer opisane kružnice dva puta veći od polumjera upisane kružnice.

2. Istokračan trokut. Ako iz krajeva dužine $A\,B$ opišemo krugove, kojima su polumjeri povoljni ali veći od polovine dužine $A\,B$, dobit ćemo, ako spojimo jedno presjecište tih krugova C sa točkama A i B, istokračan trokut. Valja spomenuti, da se kod toga konstruiranja ne izvlače čitavi krugovi već samo njihovi

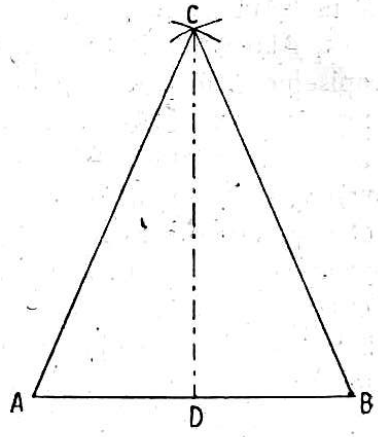
mali dijelovi u blizini točke C. Tako dobiveni trokut jest istokračan trokut. On ima jednu os simetrije CD, koja spaja vrh C sa središtem D baze AB (slika 58.).



Sl. 56.

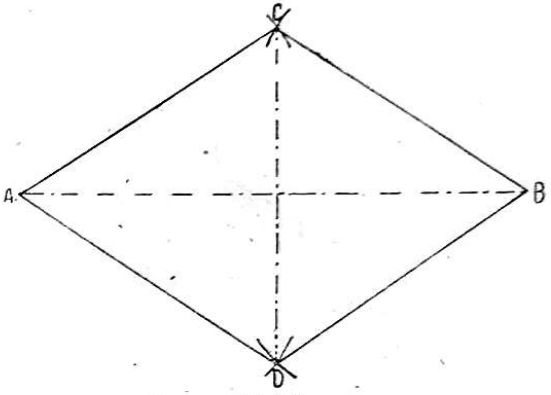


Sl. 57.



Sl. 58.

3. Romb. Ako konstruiraš dužinu AB i postupaš isto onako, kako si postupao, kad si konstruirao istokračan trokut, dobit ćeš s jedne strane dužine AB točku C; ali sasvim jednakim postupkom dobit ćeš s druge strane točku D. Spojiš li sada točke A i B s točkama C i D, dobit ćeš četverokut, koji ima sve četiri stranice jednake a zove se romb. Romb je simetričan lik; osi simetrije ujedno su i dijagonale romba AB, CD (slika 59.) Romb dijeli svaka simetrala na dva istokračna trokuta, u posebnom slučaju mogu ta dva trokuta da budu i istostrana. Nacrtaj takav romb.

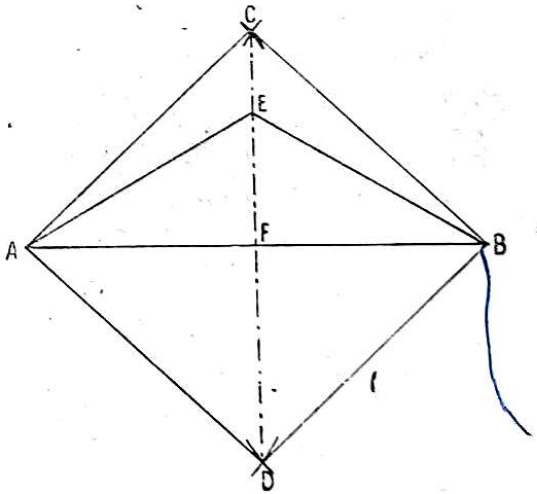


Sl. 59.

Konstruirajući šestarom i ravnalom romb riješili smo ove osnovne zadaće, koje ćemo sada upamtiti. Sve se ove zadaće, rješavaju šestarom i ravnalom.

1. Osnova zadaća: Dužinu AB raspoloviti. Nacrtaj točke C i D onako, kako si postupao, kad si konstruirao romb. Spoji C i D, pravac CD raspolavlja dužinu AB.

Pravac CD ujedno je os simetrije dužine AB. Iz slike 60. vidi se, da je svaka točka na osi simetrije jednako daleko od krajeva dužine AB, jer su trokuti ACB, ADB, AEB ... istokračni.

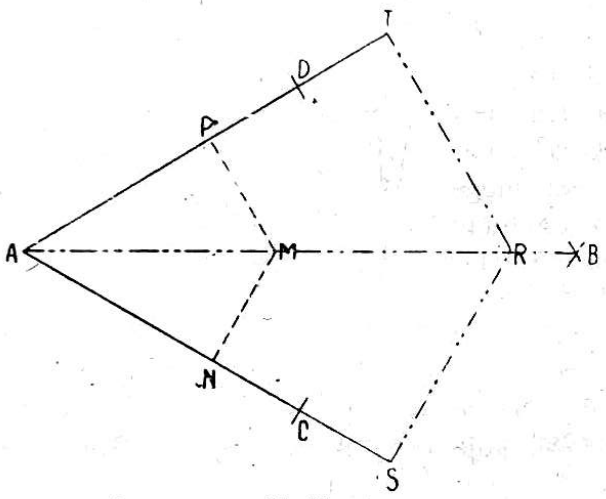


Sl. 60.

2. Osnovna zadaća: Raspolovi zadani kut. Na krakovima kuta izreži iz vrha A jednake dužine AC i AD. Trokut ACD popuni na romb $ABCD$ i povuci dijagonalu AB (sl. 61.). AB je simetrala romba, dijeli ga dakle na dva trokuta, koja se mogu okretanjem oko AB pokriti. Prema tomu je i $\sphericalangle CAD$ raspolovljen. Raspolovnica

kuta AB ujedno je i njegova os simetrije. Svaka točka na osi jednako je daleko od oba kraka: $MN = MP$, $RS = RT$ i t. d.

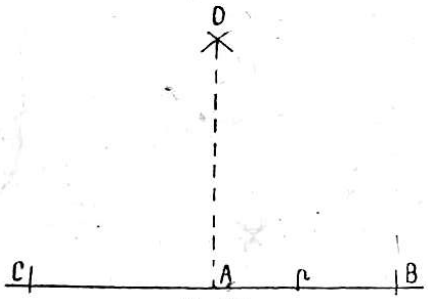
3. Osnovna zadaća: Na zadanom pravcu p u zadanoj točki A nacrtaj okomicu. Iz točke A odreži s jedne i druge strane



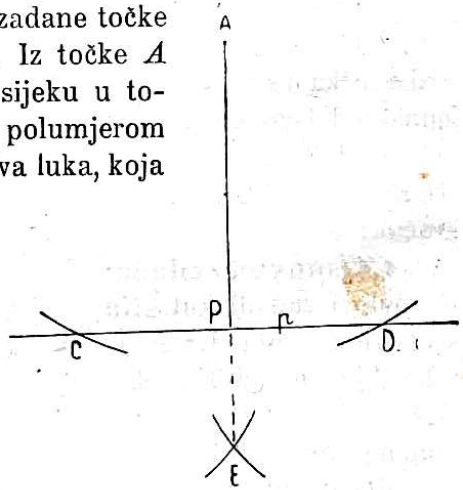
Sl. 61.

jednake dužine $AB = AC$. Iz točaka B i C opiši s polumjerom većim od AB dva luka. Ti se lukovi sijeku u točki D. Spoji A sa D i dobit ćeš okomicu AD. (Slika 62.).

4. Osnovna zadaća: Iz zadane točke A spusti okomicu na pravac p. Iz točke A opiši dva luka, koja pravac p sijeku u točkama C i D. Iz C i D opiši polumjerom većim od polovine dužine CD dva luka, koja



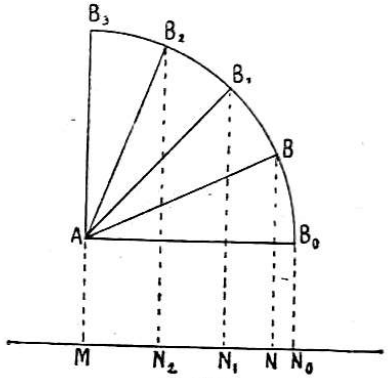
Sl. 62.



Sl. 63.

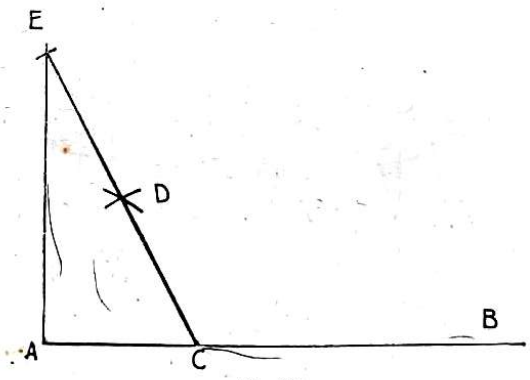
se sijeku u točki E. Spoji točku A s točkom E pa ćeš dobiti pravac AE okomit na pravcu p (slika 63.).

Okomica AE siječe pravac p u točki P; ta se točka naziva okomitom projekcijom točke A na pravcu P. Točku A okomito projicirati na pravac p znači: iz točke A spustiti okomicu na pravac p i odrediti točku, u kojoj ta okomica siječe pravac p. Dužinu AB projicirati na pravac p znači: naći projekcije točaka A B; te projekcije neka budu M i N, onda je dužina MN projekcija dužine AB. Kako se mijenja projekcija, ako se dužina AB vrti oko točke A ostajući uvijek jednaka? Kada je projekcija najveća a kada najmanja, i kolika je u ta dva skrajna slučaja? (slika 64.).

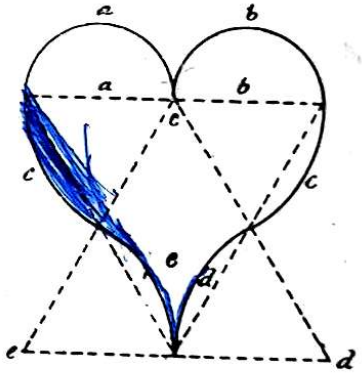


Sl. 64.

Zadaća. Konstruiraj u točki A na kraju dužine AB okomicu. Iz točke A odreži na dužini komad AC; nad tim komadom konstruiraj istostran trokut sa stranicom AC. Stranicu CD produlji preko vrha D za njenu dužinu, tako da je $DE = CD$. Točku E spoji s točkom A. EA stoji okomito na AB (slika 65.). Trokut CAE jest kod A pravokutan, jedan mu od kosih kutova ima 60°, drugi 30°, a manja mu je kateta polovina



Sl. 65.



Sl. 66.

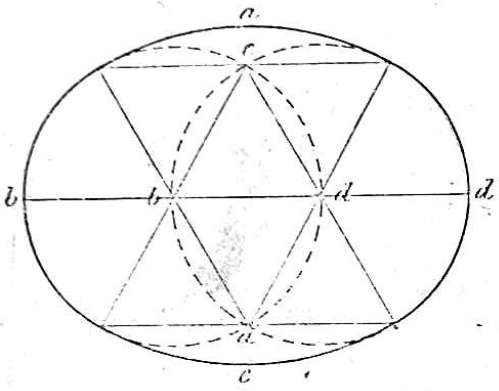
hipotenuze. To je trokut, koji ti potrebuješ kod crtanja i služ kao model za kutove od 90°, 60° i 30°. Vidi o tom u § 13.

Primjeri. Konstruiraj uporabom modela, a za tim upotrebom šestara i ravnala:

*

1. Istostran trokut iz visine (3 cm, 3 cm 4 mm, 3·5 cm itd.).

2. Istokračan trokut *a)* iz baze i jednog kuta uz bazu *b)* iz baze i kraka *c)* iz kraka i kuta na vrhu *d)* iz kraka i kuta uz bazu *e)* iz baze i visine, koja joj pripada *f)* iz baze i kuta na vrhu.



Sl. 67.

3. Nacrtaj istostran trokut i u udaljenosti 2 cm od jedne njegove stranice pravac p. Nacrtaj simetričan trokut zadanome s obzirom na taj pravac.

4. Nacrtaj istokračan trokut i njemu simetričan s obzirom na jedan krak.

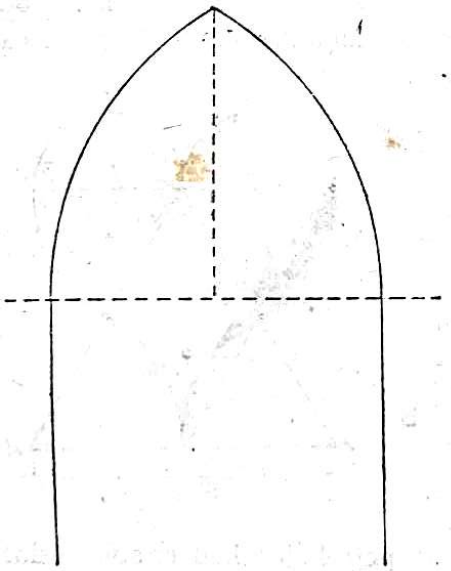
5. Nacrtaj romb iz stranice i jednog kuta.

6. Nacrtaj romb, ako su mu zadane dijagonale.

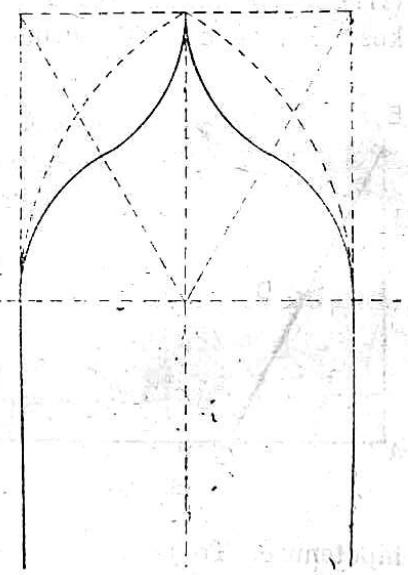
7. Nacrtaj romb iz dijagonale i stranice.

8. Nacrtaj romb iz dijagonale i kuta, kojim ona prolazi.

9. Nacrtaj romb iz dijagonale i njoj suprotna kuta.



Sl. 68.



Sl. 69.

10. S pomoću romba riješi ovu zadaću šestarom i ravnalom: Zadanom točkom povuci paralelu zadanom pravcu.

11. Nacrtaj romb i njemu simetričan lik s obzirom na jednu os simetrije, koja stoji okomito na jednoj dijagonali i ide *a)* jednim vrhom romba *b)* sredinom između jednog vrha i sjecišta dijagonalâ.

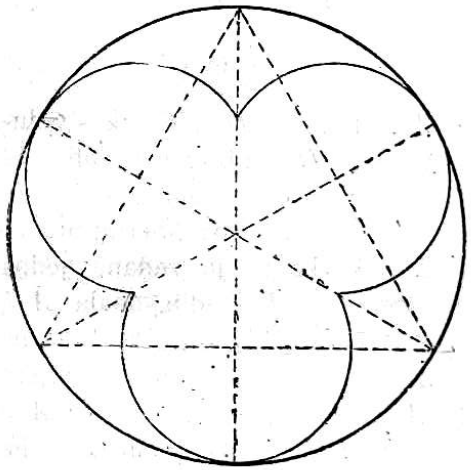
12. Ispitaj od kojih crtâ sastoje likovi na slici 66, 67, 68, 69, 70.

13. Konstruiraj slike 66, 67, 68, 69, 70.

§ 21. Konstrukcija kvadrata. pravokutnika i pravokutnog trokuta.

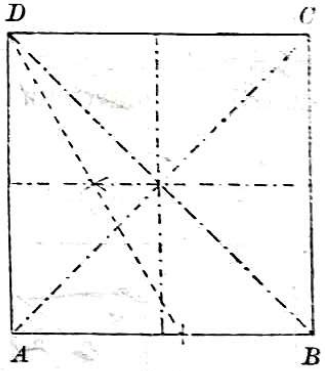
1. Zadaća: Nacrtaj kvadrat, kome je stranica AB. Nacrtaj dužinu AB, na kraju A nacrtaj na tu dužinu okomicu i na njoj nanesi dužinu $AD = AB$. Iz točaka B i D opiši lukove s polumjerom AB. Ti se lukovi sijeku u točki C, koje je četvrti vrh kvadrata i potegni ravnalom stranice BC i DC (slika 71.).

Kvadrat je simetričan lik s četiri osi simetrije: dvije dijagonale i druga dva pravca, koja stoje okomito na stranicama u njihovim središtima. Te potonje dvije osi simetrije zvat ćemo središnjicama. Sve četiri osi sijeku se u središtu kvadrata Q.



Sl. 70.

Primjeri: 1. Konstruiraj kvadrat, kome je zadana dijagonala.



Sl. 71.

2. Konstruiraj kvadrat i nacrtaj njegove osi simetrije. Nacrtaj sada drugi kvadrat, kome će dijagonale biti središnjice prvog kvadrata ali po veličini jednake s dijagonalama prvog.

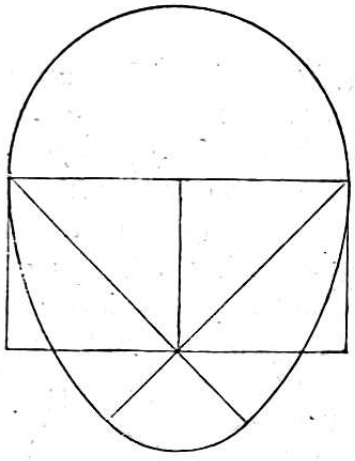
3. Nacrtaj kvadrat s njegovim osima simetrije i nacrtaj lik, koji će biti simetričan prvom s obzirom na jednu stranicu kvadrata.

4. Nacrtaj kvadrat i njegove dijagonale a za tim nacrtaj tome liku simetričan lik s obzirom na jednu os simetrije, koja ide vrhom kvadrata i stoji okomito na dijagonali, koja prolazi tim vrhom.

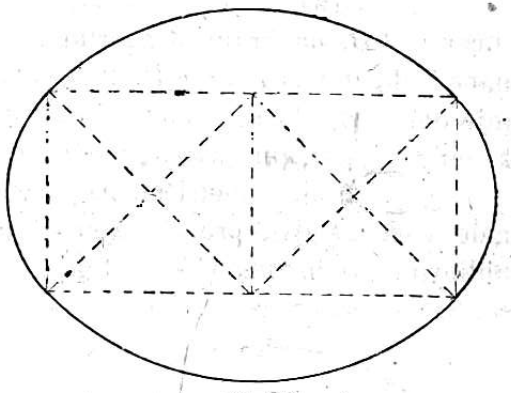
5. Ispitaj, iz kojih su crta sastavljeni likovi u slici 72, 73.

6. Nacrtaj likove kakovi su na slici 72, 73.

2. Zadaća: Nacrtaj pravokutnik, komu su zadane stranice AB i AD (slika 74.). Povuci stranicu AB, u točki A nacrtaj

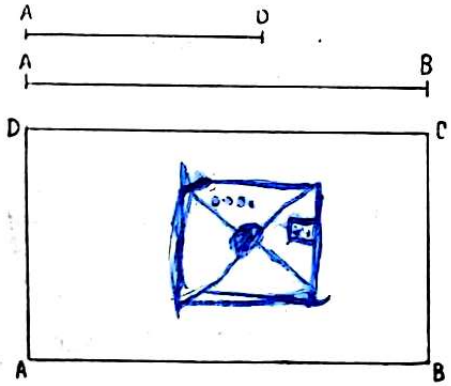


Sl. 72.



Sl. 73.

okomicu i na nju nanesi dažinu AD. Iz točke D opiši luk s polumjerom AB a iz točke B luk polumjera AD. Na taj način dobit ćeš četvrti vrh pravokutnika C. Tada povuci ravnalom DC i CB.



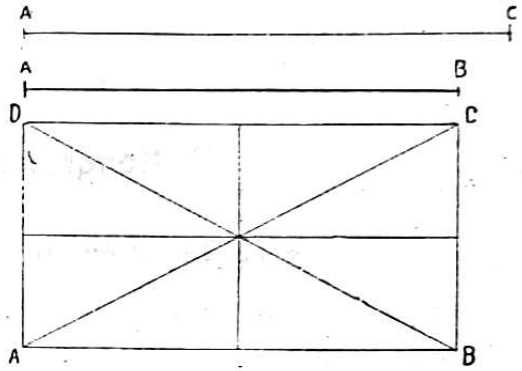
Sl. 74.

3. Zadaća: Nacrtaj pravokutnik, komu je zadana jedna stranica AB i dijagonala AC. Nacrtaj pravi kut u točki A dužine AB i iz B opiši luk polumjera AC, koji siječe okomicu iz A u točki D. Tim si dobio tri vrha pravokutnika, a četvrti naći ćeš na način opisan u zadaći, koja je bila pred ovom (slika 75.).

Pravokutnik ima dvije osi simetrije, a to su njegove središnjice. One se sijeku u središtu pravokutnika. U istoj točki sijeku se i njegove dijagonale.

4. Iz promatranja pravokutnika (i kvadrata, koji nije drugo nego pravokutnik jednakih stranica) vidimo ovo: dva paralelna pravca imaju kao os simetrije pravac, koji je s njima paralelan i ide po sredini između njih. Sve točke na toj osi simetrije jednako su daleko od oba paralelna pravca (slika 76.).

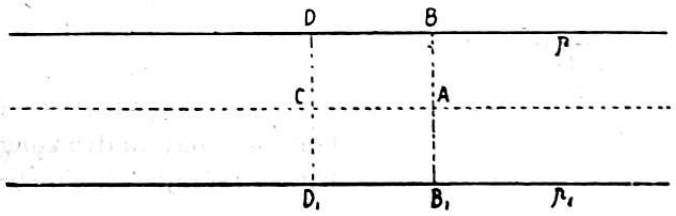
5. Pravokutnik i kvadrat imaju jednake dijagonale. Te se dijagonale sijeku u jednoj točki, koja je središte kvadrata i pravokutnika i ujedno središte kruga, koji ide svim vrhovima tih četverokuta.



Sl. 75.

6. Na osnovu toga možemo lako i jednostavno konstruirati prave kutove i pravokutne trokute.

Zadaća: Konstruiraj pravokutan trokut, ako se zada hipotenuza AB i kateta AC. Zadana hipotenuza AB neka bude dijametar kruga, koji treba da nacrtaš. Treći vrh pravokutna trokuta dobit ćeš, ako iz vrha A s dužinom AC presiječeš tako nacrtani krug. Trokut ABC jest naime po-



Sl. 76.

lovina pravokutnika, kojemu je AB jedna dijagonala a OC polovina druge (slika 77.)

7. Sada dobivamo lako još iedno rješenje osnovne zadaće, koju smo već riješili u § 20: Na pravcu p u krajnoj točki A nacrtati okomicu. Oko bilo koje točke točke O opiši krug, koji siječe pravac p u točkama A i B. Dijametar OB siječe krug u točki C, spojimo C sa A pa dobijemo traženu okomicu. Trokut BAC jest polovina pravokutnika s jednom dijagonalom BC (slika 78.).

Primjeri: 1. Nacrtaj pravokutan trokut, ako se zadaju obje katete.

2. Nacrtaj pravokutan istokračan trokut, ako se zada hipotenuza.

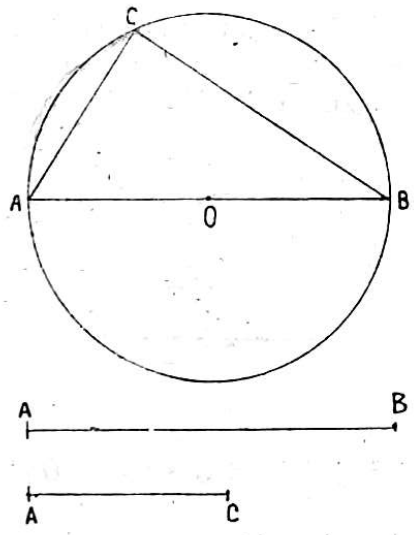
3. Nacrtaj pravokutan trokut, ako se zada *a)* hipotenuza i jedan kut *b)* kateta i jedan kut.

4. Nacrtaj pravokutnik i središta njegovih stranica spoji. Kakov si četverokut dobio?

V. Kongruencija.

§ 22. Kongruentni ravni likovi.

Dva simetrična lika imadu isti oblik i veličinu. O tom se lako uvjeriš, ako nacrtaš na papiru bilo kakova dva simetrična lika i papir savineš oko osi simetrije. Kod toga će se simetrični likovi potpuno prikriti. Pokaži to crtanjem i savijanjem papira. Takove likove, koje možemo dovesti u takav položaj, da se potpuno pokrivaju zovemo kongruentnim likovima. Kongruentni dakle likovi imaju jednak oblik i jednaku veličinu. Dva su simetrična lika kongruentna; ali dva kongruentna lika ne moraju biti simetrična.



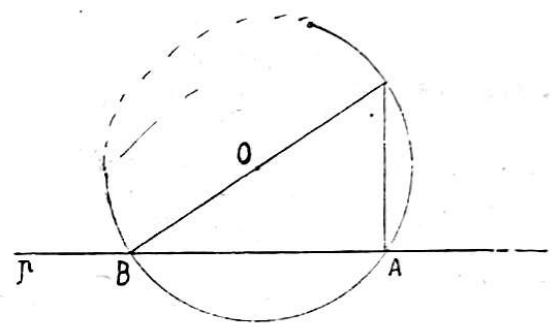
Sl. 77.

§ 23. Konstrukcija kosokutnih trokuta.

1. Oblik i veličina trokuta zavisi očito od toga, kolike su mu stranice i koliki su mu kutovi. Neka je sada na tabli nacrtan trokut, pa nam se postavi kao zadaća, da i sjutra, kada bude tabla izbrisana, nacrtamo jedan trokut, koji će i po obliku i po veličini biti jednak sa trokutom, koji je sada nacrtan. Trokut ima tri stranice i tri kuta, od kojih

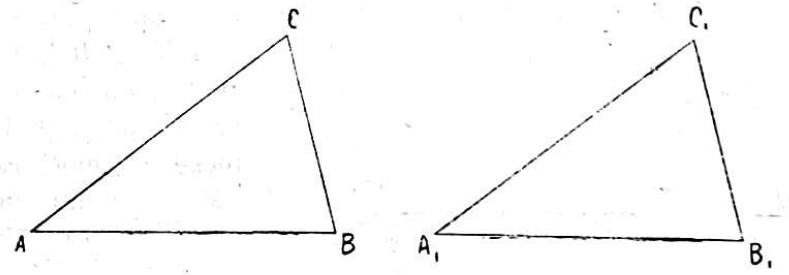
smo rekli, da zavisi veličina i oblik. Pita se sada, moramo li znati i izmjeriti svih tih šest komada, ako želimo da riješimo našu zadaću, ili, ako ne moramo, koliko je zato potrebno komada.

2. Recimo, da je $A\,B\,C$ trokut (slika 79.), koji se ima nacrtati po obliku i veličini. Točka A', koja se može nacrtati gdjegod, neka predstavlja točku A. Da nacrtamo točku B', koja ima predstavljati točku B, uzet ćemo u šestilo dužinu $A\,B$ i opisati krug iz točke A'. Točka B' leži negdje na tom krugu; gdje, to je svejedno. Gdje leži sada točka C', koja ima da predstavlja točku C? Jasno je, da C' ima da leži negdje na kružnici, opisanoj iz A' polumjerom $A\,C$ a isto tako i na kružnici opisanoj iz B' polumjerom $B\,C$. Točka C' mora dakle da leži na presjecištu obiju kružnica. Konstrukcijom i polaganjem trokuta $A'\,B'\,C'$ na trokut $A\,B\,C$ uvjeravamo se, da su oni kongruentni. To se piše $\triangle\ A\,B\,C \cong \triangle\ A'\,B'\,C'$. Znak $\cong$ čitaj „kongruentan je sa".



Sl. 78.

Iz toga slijedi važna istina: Dva su trokuta kongruentna, to jest imadu isti oblik i veličinu, ako su stranice jednog trokuta redom jednake sa stranicama drugog.



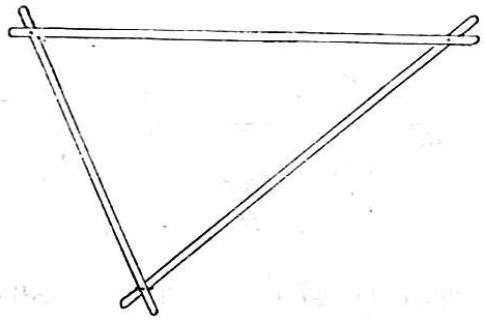
Sl. 79.

Dalje slijedi iz onoga, što je gore rečeno, ova istina: Trokut je potpuno određen po obliku i veličini, ako su mu zadane njegove **tri** stranice. Ta se stvar može pokazati i na modelu. Tri stranice trokuta (slika 80.) koje sačinjavaju tri štapića,

spojene su tako, da se svaka može vrtjeti oko svakog vrha, kojim prolazi. Usprkos toga čitavi je trokut jedna „kruta" slika kojoj se ne da mijenjati ni oblik ni veličina. Naprotiv bi lako na sličan način sastavljenom četverokutu (slika 81.) mogao mijenjati oblik.

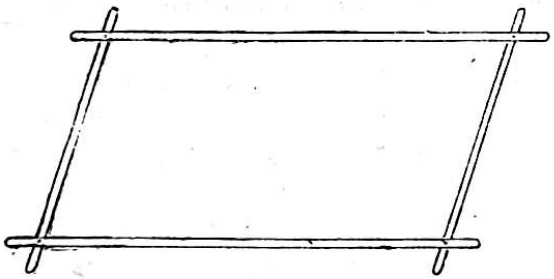
Zadaća I.: Nacrtaj trokut, komu su zadane sve tri stranice. Tu smo zadaću riješili gore.

Zadaća: U zadanoj točki pravca p nacrtaj zadani kut (slika 82). Neka je zadana točka A' na pravcu p, koja ima da bude vrh kuta, kome će jedan krak biti pravac p. Iz vrha A zadana kuta opiši luk, koji odreže na krakovima točke B i C. S tim istim polumjerom opiši luk iz točke A', taj luk odreže na pravcu p točku B'. Iz točke B' opiši polumjerom BC kružnicu, koja siječe nacrtani luk u točki C'. Točku A' spoji sa C' pa si time nacrtao traženi kut. To se vidi odatle, što je $\triangle ABC$ kongruentan sa $\triangle A'B'C'$, pa je prema tomu i kut kod A jednak s kutom kod A'.



Sl. 80.

3. Pogledajmo sada, imali još koji način, kojim bismo trokutu ABC mogli nacrtati drugi s njim kongruentan trokut. Točka A' (slika 83.) neka i opet odgovara točki A. Točku B' dobit ćemo negdje na luku opisanom polumjerom AB iz točke A' kao što smo to pokazali prije. Položaj točke C' moći ćemo sada odrediti nešto drugčije nego što smo ga odredili prije. U točku A' prenesimo kut A, tako da mu jedan krak bude $A'B'$. Vrh C' leži na drugom kraku, od A' udaljen za AC. Tim je trokut $A'B'C'$ određen potpuno, a i opet je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Odatle se učimo ovoj istini:



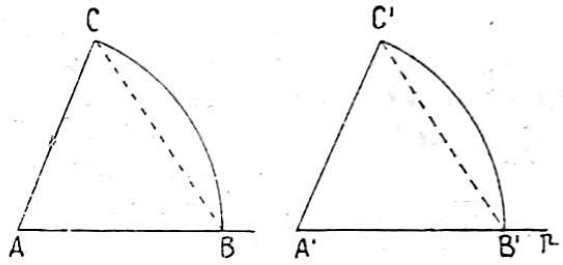
Sl. 81.

Dva su trokuta kongruentna, ako su dvije stranice i kut među njima u jednom trokutu jednake sa dvije stranice i kutom među njima u drugom trokutu.

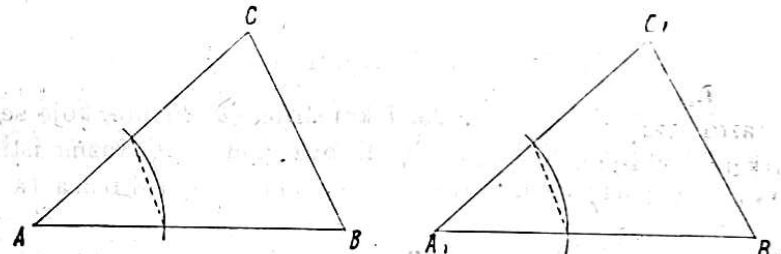
A tim je načinom riješena još i ova:

Zadaća II.: Iz dvije stranice i kuta među njima konstruiraj trokut

4. Neka je i opet zadan trokut ABC (slika 84.). Sada ćemo nacrtati trokut $A'B'C'$, koji će s njim biti kongruentan na ovaj način. Stranica $A'B'$ neka odgovara stranici AB. U A' prenesimo kut A a u B' kut B.

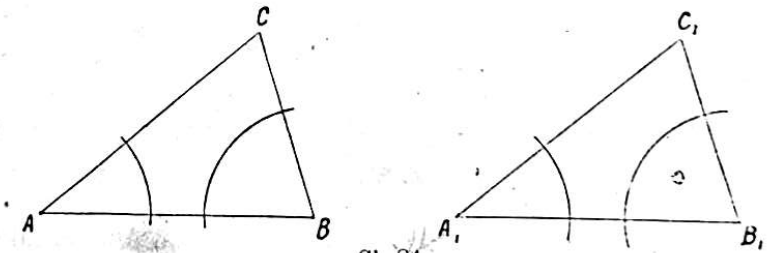


Sl. 82.



Sl. 83.

Drugi se krakovi tih kutova sijeku u točki C', koja je treći vrh trokuta $A'B'C'$. I opet je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dakle:



Sl. 84.

Dva su trokuta kongruentna, ako je jedna stranica sa dva kuta, koja su uza nju u jednom trokutu, jednaka s jednom stranicom i sa dva kuta, koja su uz ovu stranicu, u drugom trokutu.

Tim je i opet riješena

Zadaća III.: Nacrtaj trokut, ako mu je zadana jedna stranica i dva kuta, koja su uza nju.

5. Ima još jedan način, na koji se trokutu ABC može konstruirati trokut $A'B'C'$, koji će s njim biti kongruetan. Neka je u trokutu ABC stranica AB veća od stranica AC. Nacrtajmo $A'C' = AC$ i u C' nanesimo kut C. Iz A' opišimo luk s polumjerom AB pa ćemo dobiti treći vrh trokuta B'. I sada će biti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (slika 85.).

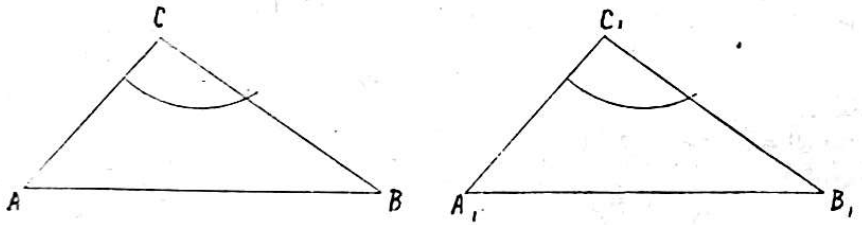
Dva su trokuta kongruentna, ako su dvije stranice i kut suprotan većoj u jednom trokutu jednake sa dvije stranice i s kutom suprotnim većoj od tih stranica u drugom trokutu.

Zadaća IV.: Konstruiraj trokut, ako su mu zadane dvije stranice i kut nasuprot većoj. Konstrukcija je izvedena čas prije.

§ 24. Dovoljni podaci za određivanje trokuta.

1. Iz razmatranja u § 23. i konstrukcija trokuta, koje se na tim razmatranjima osnivaju, slijedi ova nada sve važna istina: Trokut je potpuno određen sa tri svoja komada ili sa tri podatka.

To će reći, svi trokuti, koje nacrtaš iz tri zadana podatka na različnim mjestima, ili što ih različni ljudi nacrtaju, potpuno su jednaka oblika i veličine. Ti se trokuti ne podudaraju samo



Sl. 85.

u ona tri zadana već i u svim ostalim komadima. Ako su takova tri komada jednaka u dva trokuta, bit će im nužno i ostali komadi jednaki. Ako se mijenjaju podaci, mijenjat će se i ostali komadi, koji iz podataka izlaze konstrukcijom.

2. No na jedno mora da se kod toga upozori; a to je: može li se trokut konstruirati, ako su zadana tri njegova kuta

je li takov trokut potpuno određen. Vrh jednoga kuta mož emo naravno odabrati po volji; ali već za vrh drugoga kuta ne znamo, kamo da ga postavimo. Da to uzmognemo znati, mora da nam bude poznata jedna dužina. Odatle vidimo, da su za konstrukciju trokuta nužna tri komada, ali među njima mora da bude zadana barem jedna dužina (stranica). Tri kuta nijesu dovoljni podaci, da se iz njih konstruira trokut, koji bi bio potpuno određen po obliku i po veličini. Recimo, da si nacrtao kut s vrhom A' i na jednom kraku njegovom bilo gdje da si odabrao vrh B' i nacrtao kut, kome je to vrh. Kad si konstruirao ta dva kuta, određen je već tim samim i treći kut. Ili, kako se to u matematici obično govori, u trokutu je jedan kut **funkcija** od dva druga. Kad su dva od njih zadana, treći se dade vrlo lako izračunati, jer znamo, da sva tri kuta u trokutu moraju da imaju 180^0. Ako dakle na primjer jedan kut ima 70^0 drugi 65^0, onda treći mora da ima 45^0. Trokut dakle sa tri kuta nije određen za to, jer to zapravo nijesu tri nezavisna komada već samo dva; a dva komada nijesu dovoljni podaci, da se njima odredi trokut.

3. Kod pravokutna trokuta dovoljna su dva podatka, jer je treći (naime pravi kut) uvijek poznat. Zašto su kod istokračna trokuta dovoljna dva podatka? Sa koliko je podataka određen istostran trokut, kvadrat, pravokutnik, romb?

Iz podataka za konstruiranje kvadrata, pravokutnika, pravokutnog, istokračnog i istostraničnog trokuta, i romba navedenih u primjerima § 21. odredi stavke o kongruenciji tih likova.

4. U svima konstruktivnim zadaćama, kojima smo se do sada bavili, imaju dužine i kutovi, koji dolaze u obzir, biti ili nacrtani ili pak zadani njihovi mjerni brojevi. Kada si jednom iz podataka nacrtao traženi lik, izmjeri ostale mjerilom i kutomjerom i ispitaj, kako se mijenjaju stranice i kutovi i kako se mijenja oblik, kada podaci bivaju veći ili manji. Ako to učiniš, uvjerit ćeš se, da se veličina stranica i kutova mijenja, kada se mijenjaju podaci, ili kazano drukčije, konstrukcijom dobivene stranice i kutovi zavisni su od zadanih stranica i kutova. Tome se u matematici kaže: konstrukcijom dobivene stranice i kutovi jesu **funkcije** zadanih stranica i kutova.

Primjeri. U svim ovim primjerima označivat ćemo dužine stranica trokuta sa a, b, c; a kutove, koji tim stranicama leže nasuprot, označivat ćemo slovima grčkog alfabeta α, β, γ.

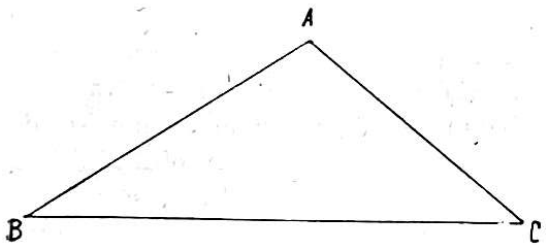
Konstruiraj dakle trokut, ako se zada:

1). $a = 5{\cdot}3$ cm, $\beta = 80^0$, $\gamma = 35^0$
2). $c = 4$ cm, $\beta = 120^0$, $\alpha = 30^0$
3). $a = 4{\cdot}1$ cm, $b = 5\,2$ cm, $\gamma = 75^0$
4). $b = 3{\cdot}8$ cm, $c = 4{\cdot}2$ cm, $\alpha = 112^0$
5). $a = 6{\cdot}2$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 70^0$
6). $a = 6{\cdot}1$ cm, $b = 5{\cdot}2$ cm, $c = 4{\cdot}3$ cm,
7). $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.

U ovom zadnjem slučaju dobit ćeš pravokutan trokut. Ovaj su slučaj poznavali već u najstarije doba istočni narodi i služili se njime za konstruiranje pravog kuta na polju. U tu svrhu je dakako centimetar premalena jedinica. Kad bismo htjeli na polju nacrtati pravi kut, onda bismo uzeli konop dug, recimo, 3 m + + 4 m + 5 m i složili ga u trokut, sa stranicama 3 m, 4 m 5 m.

§ 25. Najkraći put između dvije točke.

Ako kušaš nacrtati trokut iz ovih podataka: $a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm, lako ćeš se uvjeriti, da se to ne može. Ne ćeš moći konstruirati trokuta ni onda, ako se zadaje $a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm. Kušanjem ćeš se dakle uvjeriti, da se trokut iz stranica može konstruirati samo onda, ako je zbroj dviju stranica veći od treće. Put dakle između točaka B i C po pravcu mora dakle da bude manji od puta po slomljenoj crti iz B preko A u C. U svakom je dakle trokutu zbroj od dvije bilo koje stranice veći od treće. U našem slučaju (slika 86.) bit će dakle $BA + AC > BC$. I odatle se vidi, što smo već na početku istakli, kada smo govorili o pravcu, da je pravac najkraća spojnica dviju točaka u ravnini.



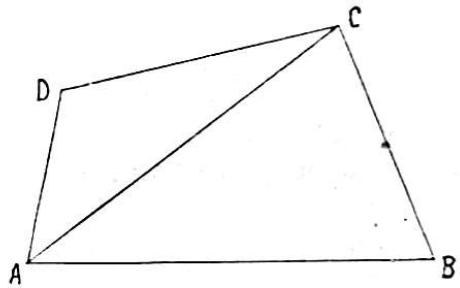
Sl. 86.

§ 26. Četverokut.

1. Za trokut, kome su zadane sve tri stranice, ili u opće tri podatka, čuli smo da je potpuno određen, „kruti“ lik. Četverokutu pak nije oblik određen sa četiri njegove stranice, on još

nije „kruti“ lik. Ako od četiri štapića, koja se mogu okretati oko četiri vrha, složiš četverokut, moći ćeš se o tome uvjeriti. Nastaje dakle za nas novo pitanje, sa koliko je podataka određen četverokut. Nacrtaj četverokut $ABCD$ (slika 87.) i povuci dijagonalu AC. Dijagonala dijeli četverokut na dva trokuta ABC i ACD. Jedan od tih trokuta na pr. ABC određen je sa tri podatka, pa se može konstruirati Ali kada si konstruirao trokut ABC, već su zadana dva vrha trokuta ACD naime vrh A i vrh O. Da se odredi treći vrh trokuta ACD naime vrh D, potrebna su još dva komada. U svemu je dakle potrebno pet podataka, da se odredi četverokut.

2. Mi smo već do sada upoznali i drugo jedno svojstvo četverokuta tim, što smo ga jednom dijagonalom razdijelili na dva trokuta. To je bilo onda, kada smo govorili o tom, kolik je zbroj svih nutarnjih kutova u bilo kojem četverokutu, a sada smo s pomoću trokuta odredili, kolik je broj podataka dovoljan, da se konstruira bilo kakov četverokut. Iz toga kao i iz mnogog drugog, što je u nauci o prostoru spomenuto o trokutu, slijedi, da je trokut u čitavoj toj nauci o prostoru najvažniji lik. O toj važnosti trokuta, naročito pak pravokutnog trokuta, imat ćemo još mnogo puta prilike, da se uvjerimo.



Sl. 87.

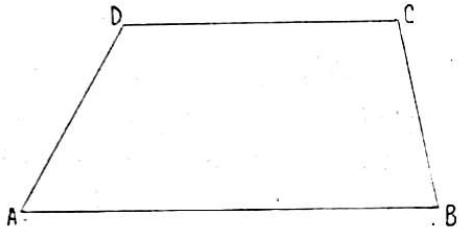
3. Posebnih vrstâ četverokuta spomenuli smo do sada više, pače smo kod nekih spomenuli i to, koliko je podataka nužno za njihovo konstruiranje.

Premda je kod trokuta uopće potrebno poznavati tri podatka, da se može konstruirati, nije ipak uvijek nužno da znamo baš tri podatka, mogu biti i samo dva poznata, kako je to bilo kod pravokutnog i istokračnog trokuta, pače i jedan kod istostranog trokuta. Dolazi to odatle, što nam je u ovim posebnim slučajevima već nešto poznato o obliku likova, koje imamo da konstruiramo, pa je za njihovo potpuno određenje nužno sada manje podataka.

Isto je tako i kod četverokuta. Pet podataka je najveći broj potreban za konstruiranje četverokuta. Taj se broj može smanjiti, ako znamo već nešto o obliku četverokuta.

4. Recimo na primjer, da znamo, da su u četverokutu dvije stranice paralelne. U tom slučaju su dovoljna četiri podatka za potpuno određenje njegovo. Četverokut sa dvije paralelne stranice zove se trapez (slika 88.). Paralelne stranice AB i CD zovu se njegove osnovice, neparalelne stranice zovu se krakovi a okomica među osnovicama zove se visina trapeza.

Ako nam je dalje poznato, da su u trapezu jednaki krakovi, onda je odmah jedan podatak manje potreban za njegovo konstruiranje. Trapez s jednakim krakovima zove se istokračan trapez (slika 89.). On je simetričan lik a njegova os simetrije jest ujedno os simetrije i njegovih osnovica.



Sl. 88.

5. Ako su u trapezu još i one druge dvije stranice (krakovi) paralelne, dobivamo nama već otprije poznatu vrstu četverokuta, koju smo nazvali paralelogram. Prema tomu je paralelogram određen sa tri podatka.

Ako pak znamo, da su u paralelogramu sve četiri stranice jednake, ili pak da su sva četiri kuta jednaka, onda je za odredenje takvog paralelograma dovoljno poznavati dva podatka. Paralelogram sa četiri jednake stranice jest romb, a paralelogram sa četiri jednaka kuta jest pravokutnik. Zašto?

Napokon, ako romb ima još i sva četiri kuta jednaka, ili ako pravokutnik ima sve četiri stranice jednake, onda dobivamo nama već dobro poznati kvadrat. Kvadrat je određen s jednim podatkom.

6. Prema svemu tome moći ćemo četverokute prema broju podataka ovako poređati:

općeniti četverokut (određen s 5 podataka)
|
trapez (određen s 4 podatka)
|
paralelogram (određen s 3 potatka)
/ \
romb pravokutnik (određen s 2 podatka)
\ /
kvadrat (odreden s 1 podatkom).

Sva svojstva, koja ima općeniti četverokut, vrijede i za sve posebne vrste; svojstva, što ih ima paralelogram, ujedno su i svojstva romba i pravokutnika i kvadrata; ali ne obrnuto.

Označivanje: U četverokutu označit ćemo stranice AB, BC, CD, DA redom slovima a, b, c, d; kutove s vrhom A, B, C, D redom sa α, β, γ, δ; dijagonalu AC sa e a dijagonalu BD sa f.

Primjeri: 1. Konstruiraj četverokut, ako se zada: a, b, c, α, β.

2. Isto tako, ako se zada: a, e, α, β, γ.

3. Isto tako, ako se zada: a, e, f, α, β.

4. Nacrtaj trapez, ako se zada: a, b, d, α.

5. Isto, ako se zada: a, b, c, γ.

6. Isto, ako se zada: a, b, c, α.

7. Isto, ako se zada: a, b, c, d.

8. Konstruiraj istokračan trapez, ako je zadano: a, α, b.

9. Konstruiraj paralelogram, ako je zadano: a, b, α.

10. Isto, kada je zadano a, e, α.

11. Isto, ako se zadaje a, e, f.

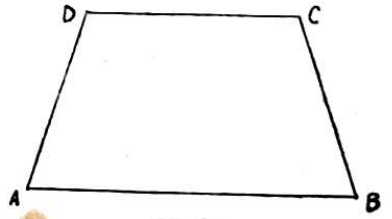
12. S pomoću paralelograma nacrtaj kroz zadanu točku sa zadanim pravcem paralelu.

13. Zašto je paralelogram potpuno određen sa 3 podatka kao i trokut: romb sa 2 kao istokračan trokut; pravokutnik kao pravokutan trokut; kvadrat kao istokračan pravokutan trokut s jednim podatkom?

§ 27. Mnogokut (poligon).

1. Ako u peterokutu, šesterokutu i t. d. povučeš iz njegova jednog vrha dijagonale, lako ćeš se uvjeriti, da je broj tih dijagonala za tri manji od broja vrhova, što ih ima mnogokut. Dakle u peterokutu možeš iz svakog vrha povući dvije, u šesterokutu tri dijagonale i t. d. Vrijedi li to također za četverokut i trokut?

Kad si u mnogokutu tako povukao sve dijagonale iz jednog vrha, podijelio si mnogokut na same trokute, pa ti ne će biti teško uvjeriti se. da je broj tih trokuta za dva manji od broja vrhova mnogokuta. Peterokut se tako podijeli na 3, šesterokut na 4 trokuta i t. d. Vrijedi li to i za četverokut?



Sl. 89.

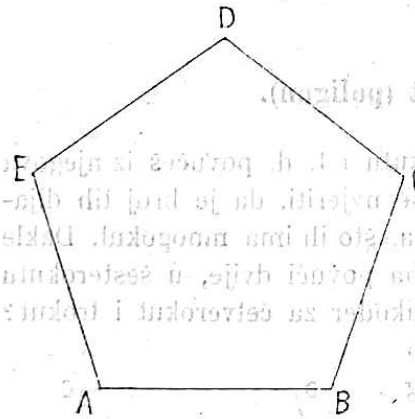
2. Nakon ovoga ne će nam biti teško odgovoriti na pitanje, kolik je zbroj svih kutova u jednom mnogokutu. Taj zbroj iznosi

toliko puta po 180^0, na koliko smo ga trokuta podijelili dijagonalama iz jednog vrha. Šesterokut na primjer ima 4 takova trokuta, dakle mu je zbroj svih kutova 4 puta po dva prava ili 720^0, to jest 4 puta po 180^0.

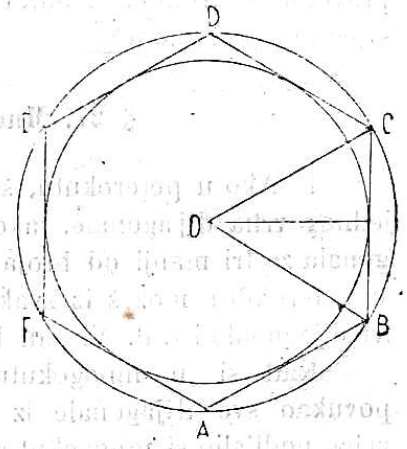
§ 28. Pravilni mnogokuti i dijeljenje kružnice.

1. Zamislimo nacrtanu kružnicu i pomislimo, da smo je podijelili na više jednakih dijelova. Da smo je razdijelili na primjer na 5 dijelova, svaki bi dio imao $360^0 : 5 = 72^0$. Nacrtaj s pomoću transportera takove dijelove i dobivene točke spoji pravcima, pa ćeš dobiti mnogokut, u kom su sve stranice i svi kutovi jednaki. Takov se mnogokut zove pravilan mnogokut ili regularan poligon. U našem slučaju bit će to pravilan peterokut (slika 90).

Ako sada postaviš točku A na točku C, kružnica će se sama sobom podudarati, ali podudarat će se i druga djelišta, jer su lukovi među sobom jednaki, a prema tomu podudarat će se i



Sl. 90.



Sl. 91.

čitavi mnogokut sam sobom. Kut kod A jednak je dakle kutu kod C, stranica AB jednaka je dakle stranici CD; na isti bi se način pokazalo, da su bilo koja dva kuta i dvije stranice među sobom jednake.

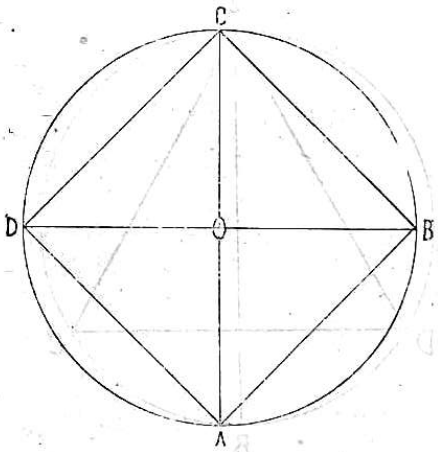
Iz ovog se razmatranja vidi još i to, da se pravilan mnogokut može sam sobom podudarati na više načina. Načini iz papira dva jednaka pravilna mnogokuta i pokaži

to podudaranje. A vidi se odatle i to, da se vrhovi svakog pravilnog mnogokuta nalaze na kružnici. Za tu kružnicu kažemo, da je opisana oko mnogokuta.

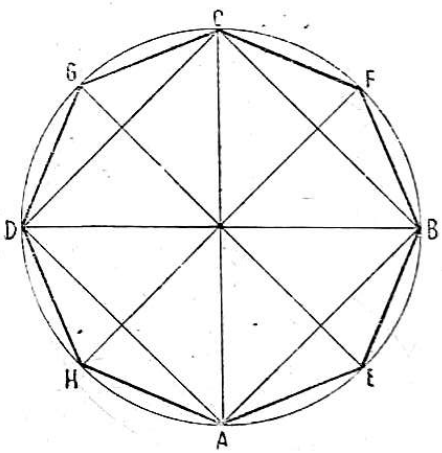
Ako iz središta kružnice spustiš na jednu stranicu pravilnog mnogokuta okomicu i tu okomicu uzmeš u šestilo kao polumjer, s kojim opišeš kružnicu, ta će se kružnica doticati i svih ostalih stranica mnogokuta. To je kružnica u pravilan mnogokut upisana (slika 91.).

Oko svakog se pravilnog mnogokuta može kružnica opisati i u svaki se pravilan mnogokut kružnica može upisati.

2. Neki se pravilni mnogokuti dadu vrlo lako konstruirati šestilom i ravnalom. Takov je mnogokut na pr. kvadrat ili pravilan četverokut. Da ga nacrtaš, dovoljno je, da u jednom krugu



Sl. 92.



Sl. 93.

povučeš dva okomita dijametra i da im krajne točke spojiš pravcima (slika 92.). Spustiš li sada iz središta kruga okomice na stranice kvadrata, podijelit ćeš svaki luk na dva dijela i tim dobiti pravilan osmerokut $AEBFCGDH$ (slika 93.). Taj se postupak može svuda upotrebiti i na taj način dobiti iz jednog pravilnog mnogokuta drugi, koji ima dva puta toliko stranica.

3. Još je jednostavnija konstrukcija pravilnog šesterokuta, jer je njegova stranica jednaka polumjeru opisana kruga (slika 91.).

Ako naime nacrtaš u krugu (slika 91.) tetivu BC, koja je jednaka polumjeru, i točke B i C spojiš sa središtem kruga O,

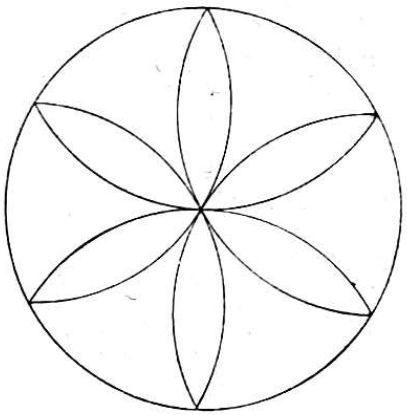
*

dobit ćeš istostran trokut. Kut kod O ima dakle 60^0, a stoga ima i luk BC 60^0; taj je luk dakle šesti dio kružnice. Prema tomu možemo kružnicu podijeliti na 6 dijelova i konstruirati pravilan šesterokut. Da to učiniš, nacrtaj kružnicu i iz jedne njene točke A odreži s polumjerom točke B i F i t. d. Ako izvučeš čitave lukove, dobit ćeš lik, kako ga prikazuje slika 94.

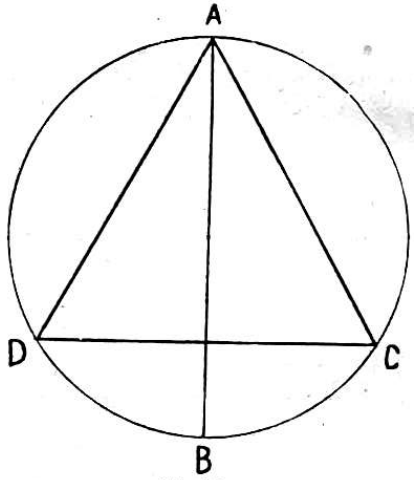
Ako podijeliš kružnicu na 6 dijelova, pa spojiš djelišta tako, da svaki put jedno preskočiš dobit ćeš istostran ili pravilan trokut.

4. Da kružnicu podijeliš na tri dijela ili da u nju nacrtaš istostran trokut možeš i ovako postupati. Povuci dijametar AB (slika 95.) i iz točke B odreži s polumjerom točke C i D. Trokut ACD bit će istostran.

5. Pravilni mnogokuti jesu simetrični likovi. Osi simetrije jesu okomice u središtima njegovih stranica i raspolovnice nje-



Sl. 94.



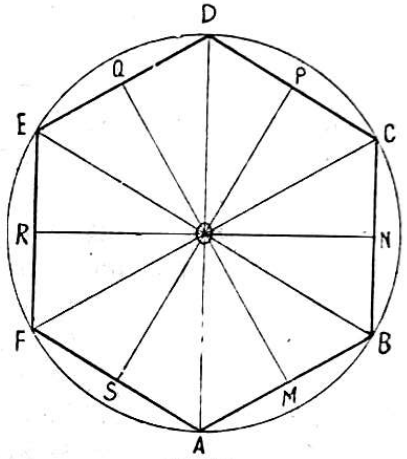
Sl. 95.

govih kutova. Da nađemo cjelokupni broj tih osi simetrije, morat ćemo dobro razlikovati mnogokute s parnim brojem stranica od mnogokuta s neparnim brojem.

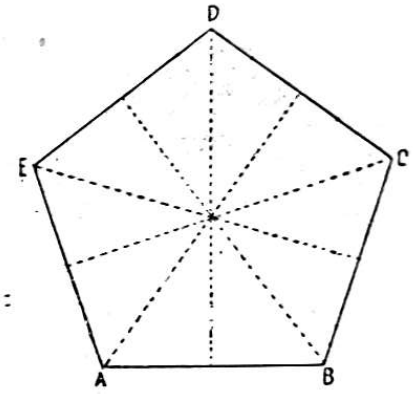
Neka nam pravilni šesterokut zastupa mnogokute s parnim brojem stranica (slika 96.). Lako se vidi, da su dijametri AOD, BOE COF, raspolovnice od po dva kuta, koja jedan drugomu leže nasuprot. Isto su tako pravci MOQ, NOR, POS okomice od po dvije suprotne stranice. Pravilan šesterokut ima dakle šest osi simetrije, tri prolaze kroz po dva suprotna vrha, a tri stoje okomito na središtima od po dvije suprotne stranice. U opće pravilan

mnogokut s parnim brojem stranica ima toliko osi simetrije, koliko ima stranica; polovina tih osi prolazi kroz po dva suprotna vrha, a polovina središtima od po dvije suprotne stranice.

Promatrajmo sada jedan pravilan mnogokut s neparnim brojem stranica, na primjer pravilan peterokut (slika 97.). Os simetrije svakog njegovog kuta ujedno je i os simetrije jedne



Sl. 96.

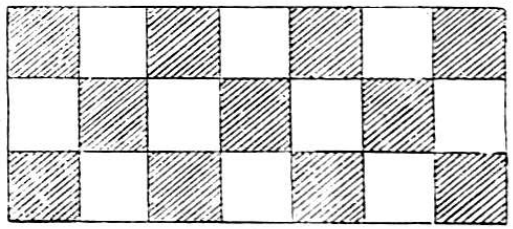


Sl. 97.

njegove stranice. Dakle i pravilan mnogokut s neparnim brojem stranica ima toliko osi simetrije, koliko ima stranica, tek one su sve iste vrste. Svaka je naime u isti čas i os simetrije jednog kuta i os simetrije jedne stranice.

§ 29. Primjena pravilnih mnogokuta.

1. Jednaki geometrijski likovi dadu se mnogo puta slagati jedan uz drugi tako, da podpuno i bez praznina pokriju ravnu površinu. U praktičnom životu vidimo to na parketiranim i popločenim podovima, na slikanom papiru, tkaninama i t. d.

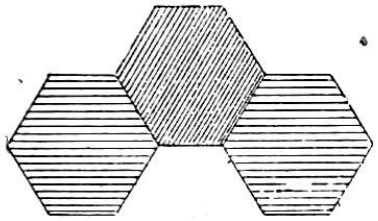


Sl. 98.

Već smo prije čuli, kako je za tu i za slične svrhe zgodan pravi kut, dakle pravokutnik kao na pr. kod parketiranja, ali još je zgodniji kvadrat, pa ga za to na-

lazimo vrlo često na podovima, zidovima, staklu, šahu i t. d. Obično su takovi kvadrati bojadisani naizmjence sa dvije različne boje (slika 98.).

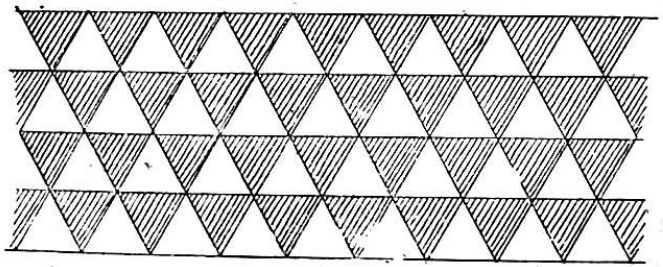
2. Pita se sada, ima li još koji pravilan mnogokut, s kojim bi se ravna površina bez praznina mogla da pokrije. Odgovor na to pitanje daje nam slika 99. To je skup pravilnih šesterokuta. Tri se takova šesterokuta dadu složiti oko jedne točke, jer svaki kut u pravilnu šesterokutu ima 120°; tri dakle kuta, koja se u svakoj točki sastaju čine 360°, a tim je prostor oko svake takove točke potpuno ispunjen. Hoćemo li ih bojadisati tako, da su svaka dva šesterokuta, koji se dotiču jednom svojom stranicom različne boje, treba nam za to tri boje.



Sl. 99.

3. I s istostranim trokutom možemo bez praznina pokriti ravnu površinu, ako ih složimo po šest oko jedne točke (slika 100.). Ta se slika može dobiti iz gornje, ako se sjetimo, da se svaki pravilan šesterokut može rastaviti na šest istostranih trokuta. Za mrežu istostranih trokuta potrebne su dvije boje.

Na taj su način iscrpljeni svi skupovi, u kojima dolaze pravilni poligoni svi jednaki, drugih takovih skupova nema.

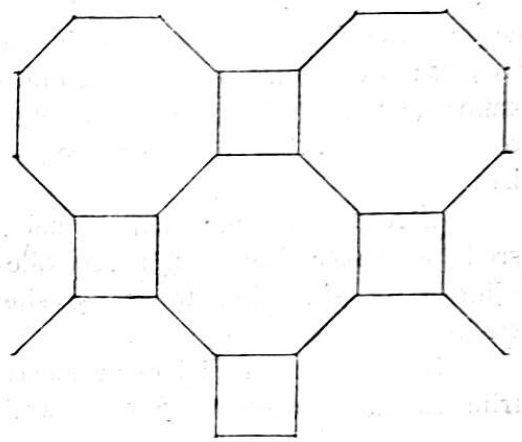


Sl. 100.

4. Vrlo se često nalaze na podovima ploče, koje daju lik, predočen slikom 101., koji je sastavljen od osmerokuta i kvadrata. U svakoj se točki sastaju dva osmerokuta i jedan kvadrat. Kut u osmerokutu ima 135°, dva dakle takova kuta imaju 270°, što s pravim kutom kvadrata čini upravo kut od 360°.

Iz slike 100. može se lako izvesti slika 102., koja nam daje skup pravilnih šesterokuta i istostranih trokuta.

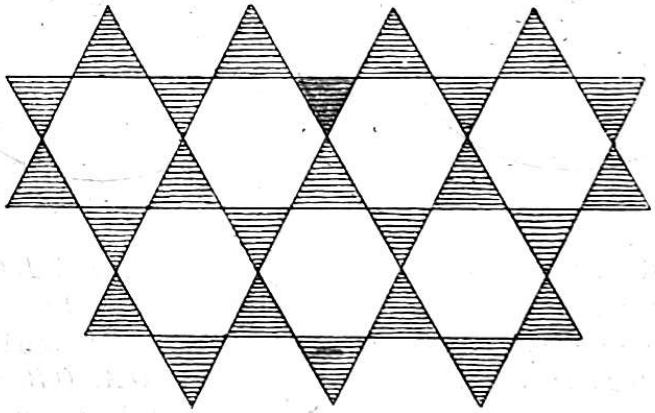
Ta se mreža sastoji kao i mreža trokuta, iz koje je izvedena, iz tri pramena paralelnih pravaca. Mreža kvadrata u slici 98. sastoji se iz dva pramena paralelnih pravaca. Pravci jednog pramena stoje okomito na pravcima drugog. U toj mreži možemo dobiti još dva pramena paralelnih pravaca, ako povučemo dijagonale onih kvadrata; i opet će pravci jednog pramena stajati okomito na pravcima drugog. Zašto?



Sl. 101.

§ 30. Glavna svojstva kruga.

1. Tetive kruga. Spoji krajnje točke bilo kojeg luka sa središtem, pa ćeš dobiti kut, kome je vrh u središtu a krakovi su mu polumjeri. Taj se kut zove središnji kut, koji pripada onomu luku. Isto je tako tetiva, koja pripada luku, ona tetiva, koja spaja krajnje njegove točke. Lako



Sl. 102.

sada vidiš, da svakom luku pripada jedna tetiva i jedan središnji kut; ali svakoj tetivi pripadaju dva luka i dva središnja kuta.

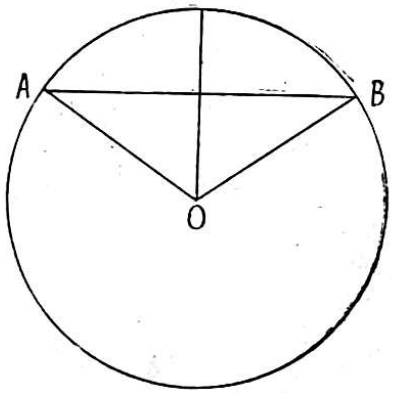
Rotacijom oko središta kruga možemo uvijek dovesti dva jednaka luka u takov položaj, da se potpuno pokriju. Kod toga

će se pokriti i njihove tetive kao i njihovi središnji kutovi. Možemo dakle reći: Kod jednog te istog kruga, ili kod dva jednaka kruga, pripadaju jednakim lukovima jednake tetive i jednaki središnji kutovi.

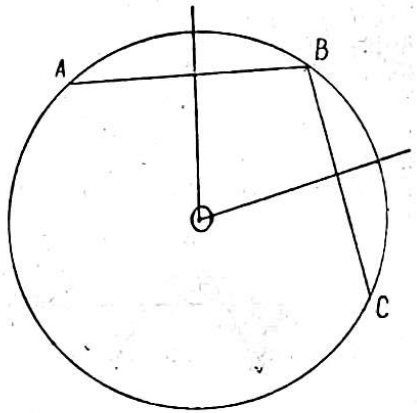
Ako krajnje točke jedne tetive spojiš sa središtem, dobit ćeš istokračan trokut. Nacrtaj sada (slika 103.) os simetrije toga trokuta; lako vidiš, da je to ujedno i os simetrije tetive, a ova, kako znamo, stoji okomito na tetivi u njenoj sredini. Dakle: okomica na tetivi u njenoj sredini ide središtem kruga.

2. Ako sada imaš negdje nacrtan krug, naći ćeš njegovo središte ovako: Povuci u krugu bilo koje dvije tetive i nacrtaj njihove osi simetrije; te se osi sijeku u jednoj točki, koja je središte zadana kruga.

Isto se tako riješi i ova zadaća: nacrtaj kružnicu, koja ide trim zadanim točkama. Spoji pravcima točku A sa točkom B



Sl. 103.



Sl. 104.

slika 104.) i točku B sa točkom C. Dužine AB i BC bit će tetive tražena kruga. Nacrtaj sada tetivama AB i BC osi simetrije. One se sijeku u točki O, koja je središte tražena kruga; polumjer toga kruga bit će jedna od dužina OA, OB, OC.

A budući da je krug po veličini i po položaju potpuno određen, kada mu znamo središte i polumjer, to smo iz te konstrukcije naučili i ovo: Krug je potpuno određen sa tri svoje točke ili trim zadanim točkama ide uvijek samo jedan krug.

Zadaća: 1. Nacrtaj krug, koji ide vrhovima trokuta (oko trokuta opisani krug).

2. Nacrtaj krug, koji ide vrhovima pravokutna trokuta. Gdje je središte toga kruga?

Što se odatle učimo?

3. Nacrtaj u zadanu krugu dvije ili više jednakih tetiva i isporedi njihove daljine od središta, pa ćeš se uvjeriti, da su jednake tetive jednako daleko od središta.

Isto tako nacrtaj u krug dvije tetive različnih dužina i isporedi njihove daljine od središta, pa ćeš vidjeti, da **veća** tetiva ima **manju** daljinu od središta.

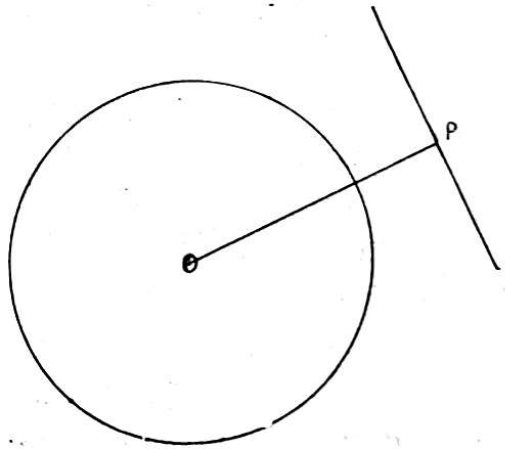
Napose pak vidimo ovo: dijametar kruga je najveća njegova tetiva.

Uzevši sve u jedno naučili smo sada ovo:

Dužina tetive u zadanom krugu jest **funkcija** njene daljine od središta; tetiva biva to veća, što je njena daljina od središta manja. Dijametar je **najveća vrijednost (maksimum)** ove funkcije, dok joj je **najmanja vrijednost (minimum)** jednaka ništici.

4. Položaj pravca prema krugu. Tangente. Ako nam je zadan jedan krug i jedan pravac, moći ćemo razlikovati tri različna položaja pravca prema krugu.

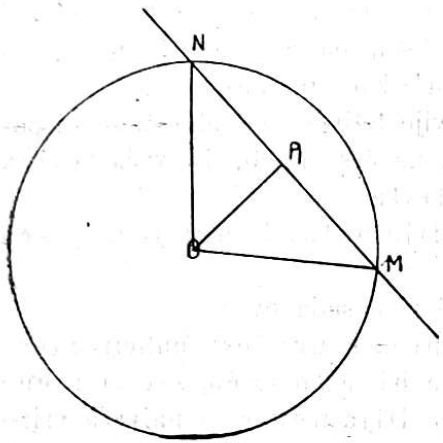
1. Može se dogoditi, da pravac i krug nemaju ni jedne zajedničke točke; pravac je posve izvan kruga (sl. 105.). Udaljenost središta kruga od bilo koje točke na pravcu veća je od polumjera kruga; napose je udaljenost središta kruga od pravca, to jest dužinu OP na okomici spuštenoj iz središta kruga na pravac, veća od polumjera. Obratno, ako je udaljenost OP središta kruga od pravca veća od polumjera, bit će pogotovo svaka druga dužina, kojoj je jedan kraj u središtu a drugi na pravcu, veća od polumjera; pravac je dakle posvema izvan kruga.



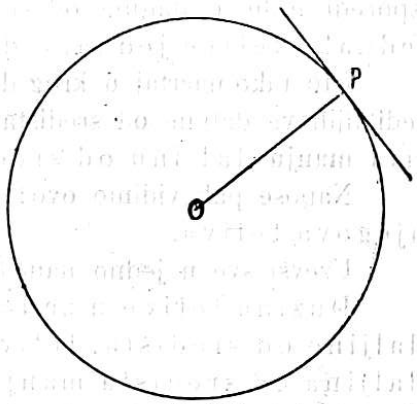
Sl. 105.

2. Ako je okomica OP manja od polumjera, onda će pravac, kako se lako vidi (slika 106.), sjeći krug u dvije točke M i N.

Dužine OM i ON jednake su polumjeru. Svaka druga dužina kao OA, kojoj se druga krajnja točka nalazi između M i N, manja je od polumjera; naprotiv je svaka dužina, kojoj se drugi



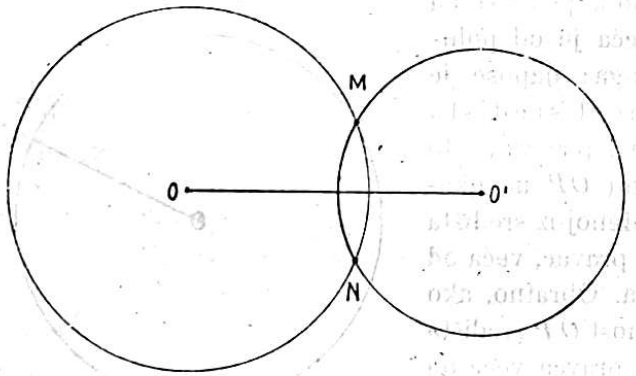
Sl. 106.



Sl. 107.

kraj ne nalazi između M i N, veća od polumjera. Pravac, koji ima takov položaj prema krugu, kako je sada opisan, zove se sekanta.

3. Ako je udaljenost od središta OP jednaka polumjeru (slika 107.), bit će točka P jedna točka na pravcu, koja leži na krugu. Svaka druga točka pravca bit će izvan kruga, jer je svaka

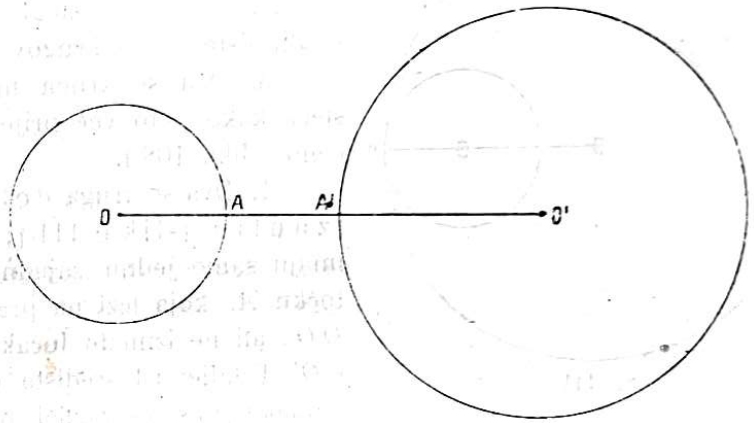


Sl. 108.

takova dužina veća od dužine OP, dakle veća od polumjera; a točke, kojima je daljina od središta veća od polumjera, leže izvan kruga. Pravac, koji ima prema krugu taki položaj, zove se

tangenta; točka P je njeno diralište. Iz toga, što je rečeno o tangenti, izlazi ova važna istina: Tangenta kruga stoji okomito na polumjeru svoga dirališta.

4. Međusobni položaj dvaju krugova. Da se uvjerimo o tom, da se dva kruga mogu da sijeku u dvije točke,

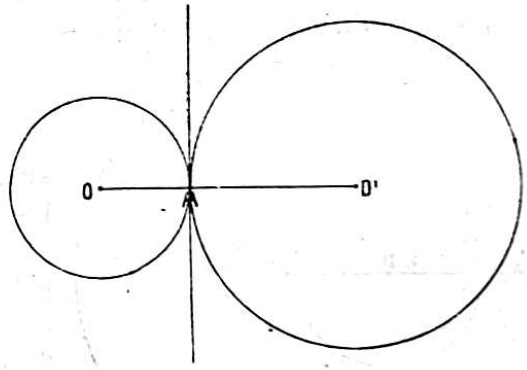


Sl. 109.

dovoljno je da pogledamo sliku 108. Dvije točke M i N, u kojima se dva kruga sijeku, leže simetrično prema pravcu OO', koji spaja njihova središta. Taj ćemo pravac zvati centralom.

Da dva kruga ne mogu da imaju više od dvije zajedničke točke, slijedi iz toga, što smo rekli, da kroz tri točke može da ide samo jedan krug.

Dva kruga nejednakih polumjera mogu da imaju pet različnih položaja jedan prema drugom.

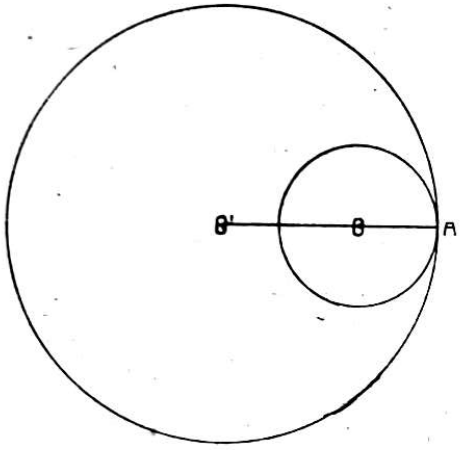


Sl. 110.

1. Jedan je krug posve izvan drugog (sl. 109.). Centrala OO' siječe jedan krug u točki A, a drugi u točki A'. Te dvije točke A i A' leže između točaka O i O'. Udaljenost središta OO' jednaka je dakle zbroju dužina OA, $O'A'$ i AA', veća je dakle od zbroja polumjera OA i $O'A'$.

2. Oba se kruga dotiču izvana (slika 110.); zajednička im je samo jedna točka A, koja leži na OO' između O i O'

Udaljenost središta u tom slučaju jednaka je zbroju polumjera. Iz slike se vidi, da je okomica na pravac OO' u točki A tangenta jednom i drugom krugu, i da jedan od ta dva kruga leži s jedne, a drugi s druge strane te tangente. Točka A zove se diralište dvaju krugova.

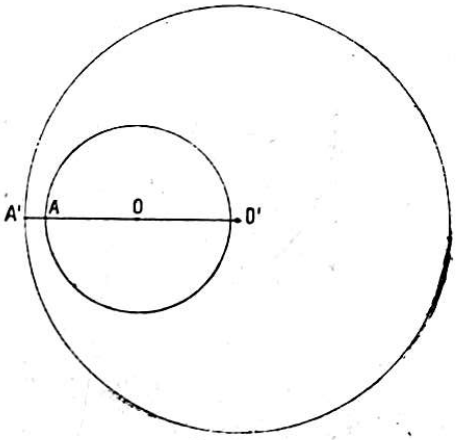


Sl. 111.

3. Dva se kruga mogu sjeći, kako je to već prije rečeno (slika 108.).

4. Dva se kruga dotiču iznutra (slika 111.); oni imaju samo jednu zajedničku točku A, koja leži na pravcu OO', ali ne između točaka O i O'. Udaljenost središta OO' jednaka je sada razlici polumjera $O'A$ i OA. Okomica na pravcu OO' u njegovoj točki A jest zajednička tangenta od obadva kruga; oba kruga leže s iste strane tangente.

5. Jedan je krug posve unutar drugog (slika 112.). Centrala ih siječe u dvije točke A i A' tako, da je polumjer OA posve u polumjeru $O'A'$. Ako se još desi i to, da se oba središta podudaraju, onda kažemo, da su krugovi koncentrični.



Sl. 112.

Primjeri: 1. Nacrtaj krug zadana polumjera, koji ide kroz dvije zadane točke.

2. Nacrtaj krug zadana polumjera, koji na zadanu pravcu odreže tetivu zadane dužine i ide zadanom točkom izvan toga pravca.

3. Odredi najveću i najmanju udaljenost točke P, koja se nalazi izvana ili unutar kruga od njegove periferije.

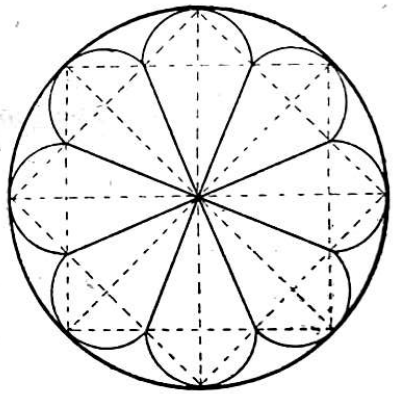
4. Nacrtaj na krug tangentu, koja je paralelna sa zadanim pravcem.

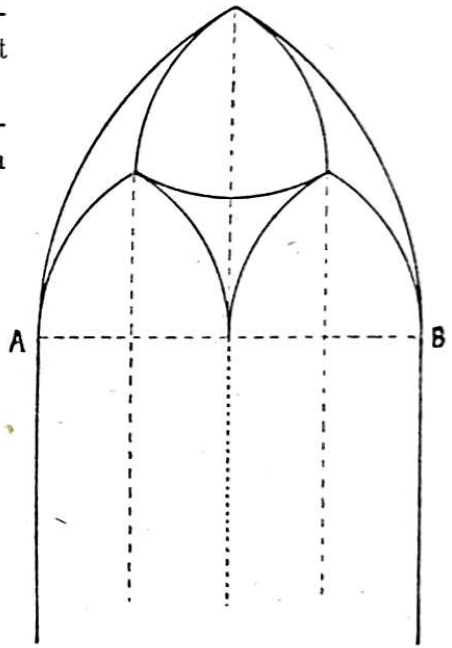
5. Nacrtaj na krug tangentu, koja stoji okomito na zadanom pravcu.

6. Nacrtaj u krugu tetivu zadane dužine, koja će biti paralelna sa nacrtanim pravcem.

Naputak za 6. Nacrtaj zadanu tetivu gdjegod u krugu i iz središta zadana kruga opiši koncentričan krug tako, da mu ona tetiva bude tangenta. Tada spusti iz središta kruga okomicu na zadani pravac i u točki, gdje tu okomicu siječe manji krug, nacrtaj tangentu. Odrezak ne tangenti unutar većeg kruga jest tražena tetiva.

7. Nacrtaj krug zadana polumjera, koji će se doticati zadana pravca i ići zadanom točkom.


Sl. 113.



Sl. 114.

Naputak za 7. Oko zadane točke kao središta opiši sa zadanim polumjerom krug i nacrtaj sa zadanim pravcem paralelu u daljini zadana polumjera s one strane, s koje se nalazi zadana točka. Središte tražena kruga jest točka, u kojoj paralela siječe krug. Dobivamo dva, jedno ili ni jedno rješenje.

8. Nacrtaj krug, koji će se doticati dvaju paralelnih pravaca i ići zadanom točkom na jednoj od tih paralela.

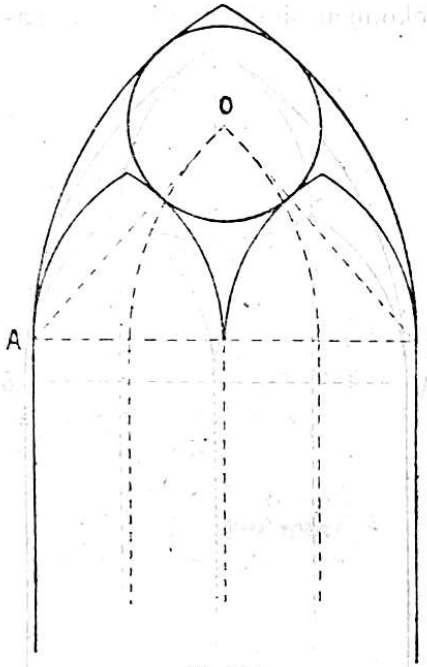
9. Nacrtaj krug, koji se dotiče dvaju paralelnih pravaca i ide jednom točkom među tim paralelama.

Naputak za 9. Središte kruga mora da se nalazi na os simetrije zadanih paralelnih pravaca i 2. na kružnici, koju opi-

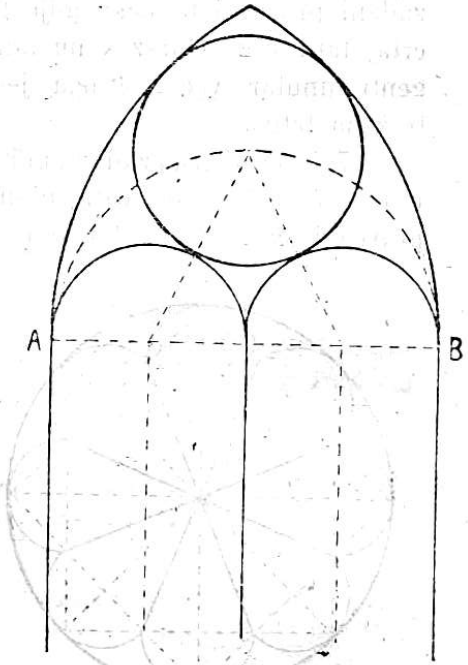
šemo oko zadane točke kao središta s polumjerom, koji je jednak udaljenosti osi simetrije od jednog zadanog pravca.

10. Nacrtaj krug zadana polumjera, koji se zadana kruga dotiče u jednoj njegovoj zadanoj točki, jedamput izvana, drugi put iz nutra.

11. Nacrtaj krug, koji se zadana kruga dotiče u jednoj njegovoj zadanoj točki i ide drugom jednom zadanom točkom.



Sl. 115.



Sl. 116.

12. Nacrtaj krug zadana polumjera, koji se dotiče zadana kruga i zadana pravca.

13. Opiši slike 113., 114., 115., 116.

14. Nacrtaj slike 114. do 116., ako se zada AB.

VI. Jednostavna geometrijska tjelesa.

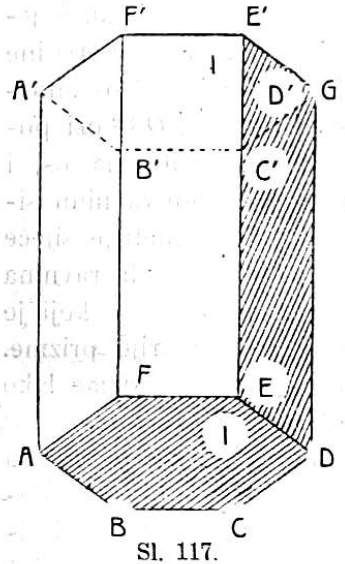
§ 31. Uspravna prizma.

1. Poliedrom nazivamo tijelo, koje je omeđeno samim mnogokutima (među mnogokute ubrajamo naravno i trokute i četverokute).

Prizmom nazivamo poliedar (slika 117.), koji je omeđen: 1. sa dvije baze, koje su dva mnogokuta, $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ i koje postaju jedna iz druge paralelnim pomicanjem; baze su dakle kongruentni mnogokuti; 2. s jednom pobočnom plohom, koja se sastoji od paralelograma $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$ i t. d.

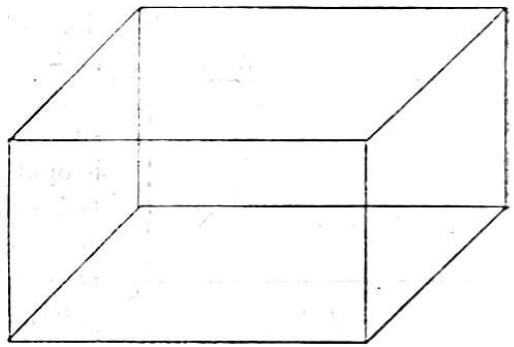
Pravce AA', BB', CC' i t. d., koji su svi među sobom jednaki i paralelni, zovemo pobočnim bridovima prizme.

Stranice baza zovemo osnovnim bridovima.



Sl. 117.

Prizma će biti uspravna, ako su joj pobočni bridovi na bazama okomiti; u tom se slučaju pobočna ploha sastoji od samih pravokutnika. Razmak baza,



Sl. 118.

koji se mjeri okomicom na obje baze, zove se visina prizme. Kod uspravne prizme jest visina jednaka pobočnom bridu.

2. Uspravna je prizma pravilna, ako su joj baze pravilni mnogokuti. Ona će biti trostrana, četverostrana i t. d., ako su joj baze trokuti, četverokuti i t, d.

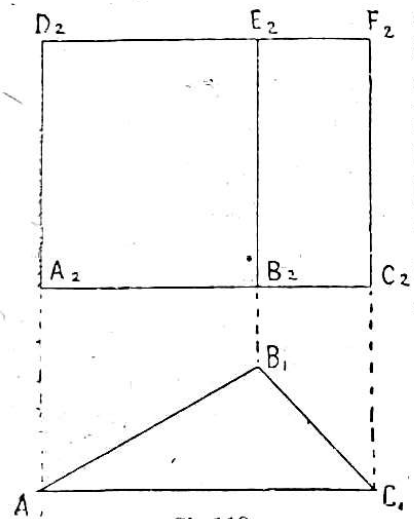
3. Prizma, kojoj su baze paralelogrami, zove se paralelepiped.

Uspravna prizma, kojoj su baze paralelogrami, zove se uspravni paralelepiped; a uspravna prizma, kojoj su baze pravokutnici, zove se pravokutni paralelepided (slika 118.). Pravokutni paralelepided možemo na tri različna načina promatrati kao uspravnu prizmu, jer možemo uzeti za baze bilo koje dvije protivne strane njegove; on ima tri sistema paralelnih bridova, svaki sistem ima 4 brida, koja su među sobom jednaka.

Dužine njegovih bridova, koji se sastaju u jednom vrhu, čine njegove dimenzije. On ima dakle tri dimenzije.

Ako su dimenzije pravokutna paralelepipeda jednake, prelazi on u kocku.

4. Svaka je pravilna prizma simetrično tijelo. Ravnine simetrije dobijemo ovako. Svaki par osi simetrije, koje jedna drugoj odgovaraju i od kojih jedna leži u jednoj, a druga u drugoj bazi, spojimo ravninama. Dobivamo dakle toliko ravnina simetrije, koliko jedna baza ima osi simetrije. Sve se te ravnine simetrije sijeku u jednom pravcu II', koji spaja sredine baza. Taj je pravac jedna os simetrije prizme. U sredini O te osi položimo ravninu okomito na os, i tim dobivamo još jednu ravninu simetrije. Ta ravnina simetrije siječe svaku od već spomenutih ravnina simetrije u jednom pravcu, koji je i opet jedna os simetrije prizme. Osi simetrije pravilne prizme lako ćeš upamtiti ovako: Ravnina kroz O okomita na II' siječe prizmu u jednom mnogokutu, koji je kongruentan s bazama. Njegove osi simetrije ujedno su i osi simetrije prizme; k tim osima imaš još pribrojiti os II', koja spaja središta baza. Tako ima na pr. pravilna trostrana prizma četiri, a pravilna šesterostrana prizma sedam osi simetrije. Ravnina simetrije ima isto toliko, koliko i osi; trostrana prizma ima dakle 4, a šesterostrana 7 i t. d.



Sl. 119.

§ 32. Predočivanje uspravne prizme crtanjem. Mreža prizme.

1. Kako ćemo tijelo, koje ima tri dimenzije, predočiti u ravnini, koja ima samo dvije dimenzije?

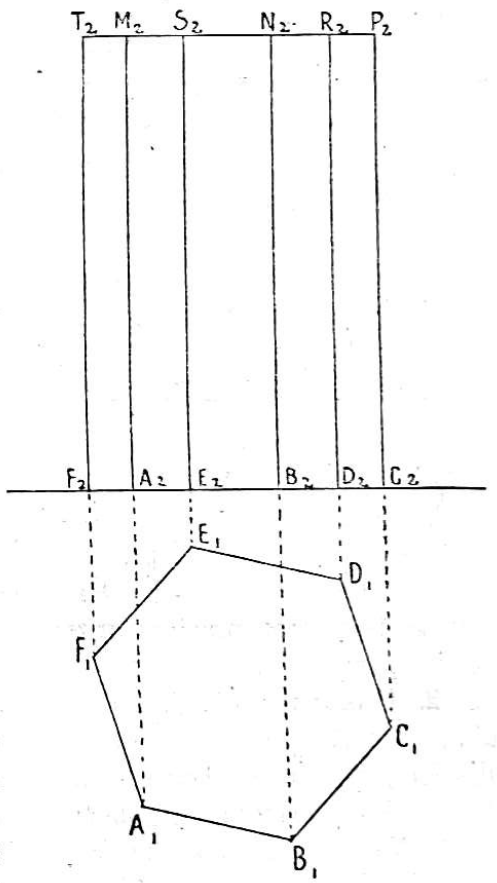
Slike 117., 118. prikazuju nam prizme, ili točnije rečeno njihove bridove, kad bismo ih iz velike daljine promatrali, tako da iza njih stoji jedan ravan vertikalan zastor, a plohe tih prizama stoje prema ravnini koso, dakle ni paralelno sa zastorom ni okomito na nj. Oblik tako dobivenih ravnih likova zavisi naravno o položaju, kakav ima prizma pred zastorom, a dobiva se tako, da se iz svakog ugla prizme spusti na ravninu zastora okomica, ili, kako se tomu drugčije kaže, dobiva se tako, da se uglovi prizme okomito projiciraju u ravninu zastora. Spoje li se projekcije uglova pravcem, dobiju se projekcije bridova i tako čitava slika uspravne prizme. Taj način prikazivanja tjelesa u ravnini daje nam jasnu i zornu sliku o obliku prikazana tijela.

2. Za mjerenje i izračunavanje mnogo je zgodnije prikazivanje tijela u dvije ravnine, kako se to čini, kad se hoće da nacrta na pr. kakova kuća, koja se po takovu nacrtu ili planu ima da sagradi.

Uzmimo na pr., da jedan model uspravne trostrane prizme, kojoj je visina 3 cm, a bridovi baze redom 2 cm, 3 cm, 4 cm, stoji na stolu, koji se dotiče zida. Gledamo li model iz oveće visine, to ćemo na površini stola vidjeti samo njegovu bazu $A_1 B_1 C_1$ (slika 119.). Ta se slika modela naziva njegovim tlocrtom. Gledamo li pak model iz oveće daljine, ali tako, da nam je oko u visini modela, dobit ćemo na stijeni tako zvani nacrt modela $A_2 B_2 C_2 F_2 E_2 D_2$.

Slika 120. prikazuje nam pravilnu šesterostranu prizmu u tlocrtu i nacrtu.

Dobivaju se takove slike okomitim projiciranjem uglova u dvije ravnine.

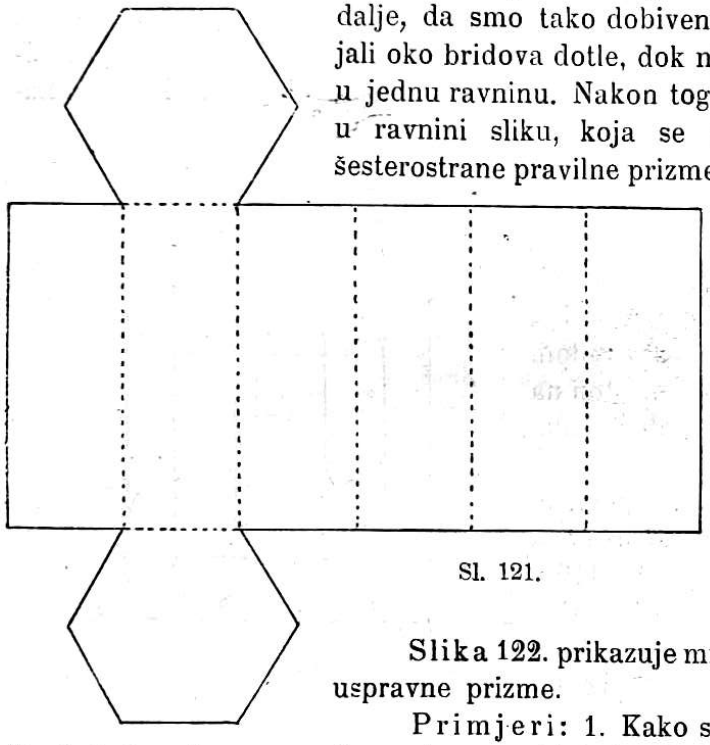


Sl. 120.

Planovi zgrada, koje se imaju podići, nacrtaju se najprije tako u tlocrtu i nacrtu, ali u umanjenom mjerilu; ono, što će na pr. biti 1 m veliko, nacrtano je 1 cm dugačko i t. d.

3. Tako se prikazuju prizme crtanjem; a kako bi takav model prizme napravili, recimo iz čvrsta papira (kartona)?

Zamislimo već napravljen takav model jedne na pr. pravilne šesterostrane prizme; pomislimo dalje, da smo po jednom postranom bridu tu prizmu prerezali, a isto tako da smo i sve osnovne bridove razrezali osim jednog na svakoj bazi. Zamislimo dalje, da smo tako dobivene plohe zavijali oko bridova dotle, dok nijesu sve pale u jednu ravninu. Nakon toga dobit ćemo u ravnini sliku, koja se zove mreža šesterostrane pravilne prizme (slika 121.).



Sl. 121.

Kad bi sada tu sliku izrezao iz papira i savinuo papir po punktiranim crtama, dobio bi iz mreže model šesterostrane i pravilne prizme.

Slika 122. prikazuje mrežu trostrane uspravne prizme.

Primjeri: 1. Kako se mora bojadisati šesterostrana pravilna prizma sa tri boje, da joj se sačuva što više ravnina i osi simetrije?

2. Uspravnoj prizmi, kojoj je baza kvadrat (romb, pravokutnik, pravilan šesterokut) ima se nacrtati mreža. Koje dužine valja izmjeriti, da se konstrukcija uzmogne izvesti? Konstruiraj također likove prereza po pobočnim bridovima.

3. Nacrtaj mrežu kocke, kojoj je jedan brid 3 cm.

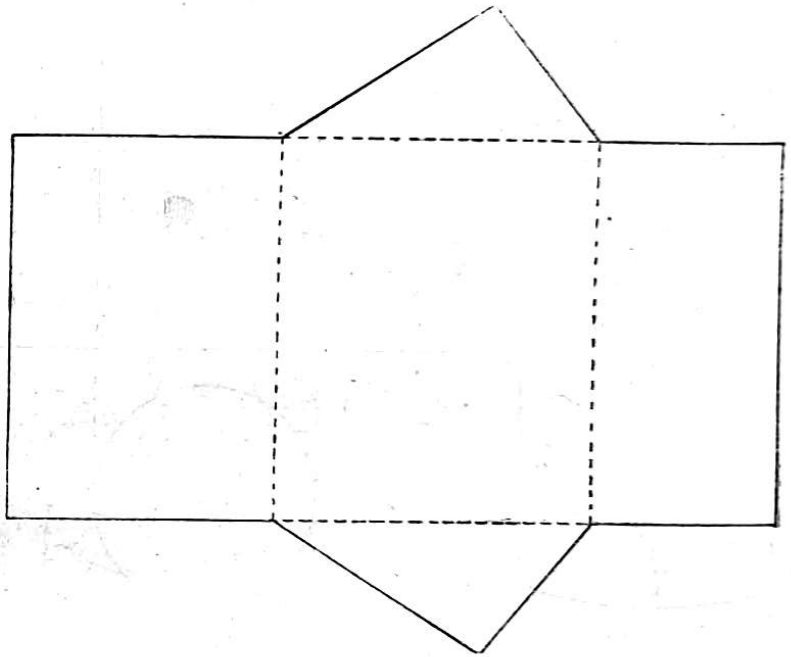
4. Nacrtaj prerez kroz dva suprotna brida iste kocke.

5. Nacrtaj tlocrt i nacrt iste kocke, ako je jedan *a)* brid kocke paralelan s pravcem, u kom se sijeku ravnina tlocrta i nacrta; *b)* ako je dijagonala baze paralelna s tim pravcem.

6. Dimenzije pravokutna paralelepipeda jesu 5 cm, 4 cm, 3 cm. Konstruiraj mrežu i nacrtaj prerez kroz bridove od 3 cm.

7. Nacrtaj isti paralelepiped u tlocrtu i nacrtu *a)* ako je jedan brid baze paralelan s pravcem, u kom se sijeku ravnina tlocrta i nacrta, *b)* ako je dijagonala baze s tim pravcem paralelna.

8. Uspravna trostrana prizma zadana je svojim tlocrtom i nacrtom dva puta umanjena (slika 119.). Iz podataka ove slike konstruiraj mrežu prizme; za tim dužine AF i AE i prerez AFE.



Sl 122.

9. Pravilna šesterostrana prizma ima osnovni brid 3 cm, a visinu 5 cm. Konstruiraj tlocrt i nacrt; za tim mrežu.

10. To isto kod pravilne trostrane prizme s osnovnim bridom 3·4 cm i visinom 5·2 cm.

§ 33. Uspravni valjak.

1. Ako kod prizme pređu baze u krugove, nastaje od prizme tijelo, koje zovemo valjkom ili cilindrom (slika 123.).

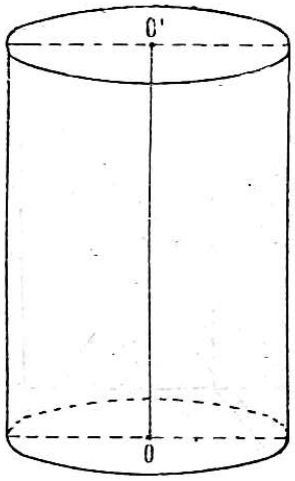
Baze valjka jesu dakle krugovi. Osim baza imamo na valjku još jednu oblu plohu, koju nazivljemo plaštem valjka. Razmak

baza zove se visina valjka, AB na slici; a razmak središta baza zove se os valjka, OO' na slici.

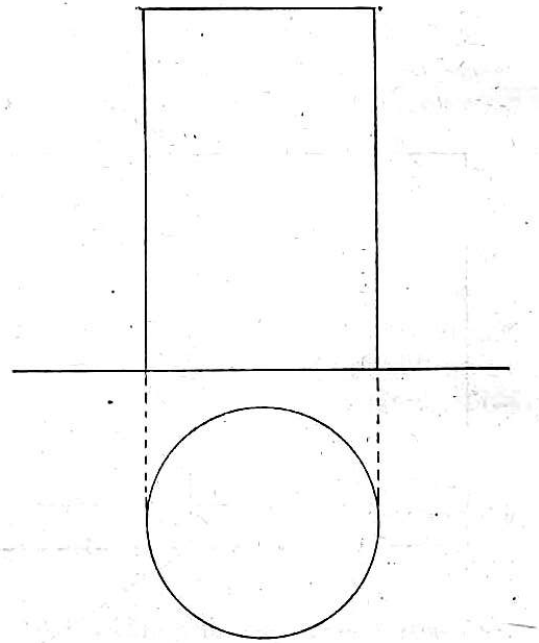
Uspravni je valjak rotaciono tijelo, jer može postati tako, da se pravokutnik $OABO'$ vrti oko osi OO' dotle, dok ne dođe opet u svoj početni položaj (slika 132.).

Svaki prerez valjka s ravninom, koja je paralelna s njegovim bazama, jest krug kongruentan s bazama.

Prerez valjka s ravninom, koja je okomita na bazama, jest pravokutnik.



Sl. 123.



Sl. 124.

2. Valjak je simetrično tijelo. Os njegova jest ujedno i jedna od njegovih osi simetrije. Svaka ravnina, koja ide osju, jest njegova ravnina simetrije. Osim ovih ima još jedna ravnina simetrije, a ta stoji okomito na osi u njenoj sredini. Ta ravnina siječe valjak u jednom krugu, svaki polumjer toga kruga jest jedna os simetrije valjka.

3. Uspravni se valjak dade vrlo jednostavno predočiti s pomoću tlocrta i nacrta. Tlocrt valjka jest krug, a nacrt pravokutnik, kome je dužina dijametar baze valjka, a visina visina valjka (slika 124.).

4. Prerežimo plašt valjka po jednom pravcu, koji se na njemu može da nacrta, i razvijmo taj plašt u ravninu, to ćemo dobiti jedan pravokutnik, kome je jedna stranica jednaka visini

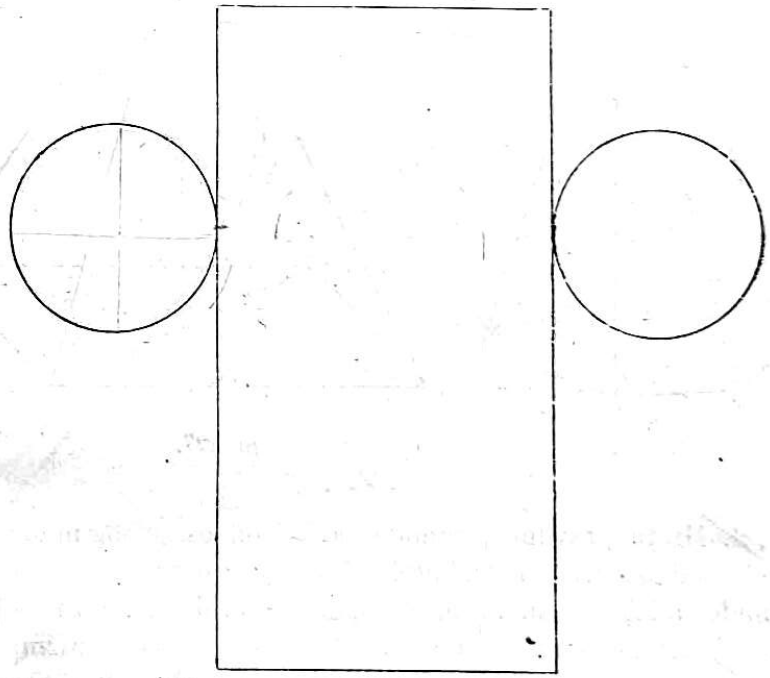
vajka, a druga je jednaka opsegu baze. Tu drugu stranicu možemo nacrtati, ako izmjerimo dijametar baze, pa ga uzmemo $3\frac{1}{7}$ puta, kako će se to pokazati kasnije. Na taj način dobijemo mrežu valjka (slika 125.).

Primjeri: 1. Od valjka se zadaje visina 5 cm, i polumjer baze 1·8 cm; nacrtaj: bazu, plašt, prerez po osi, mrežu; tlocrt i nacrt.

2. Prerez po osi valjka jest kvadrat ploštine 16 cm^2; nacrtaj mu: bazu, plašt, mrežu; tlocrt i nacrt.

§ 34. Piramida.

1. Piramida je tijelo omeđeno bazom, koja je mnogokut $ABCDE$, i pobočnom plohom, koja sastoji od samih trokuta SAB, SBC, SDC, SDE, SEA. Svi ti trokuti imaju za-



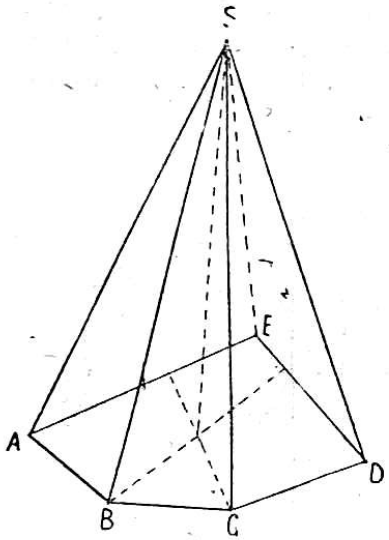
Sl. 125.

jednički vrh S, a stranice tih trokuta, koje tome vrhu leže nasuprot, jesu redom stranice baze (slika 126.). Dužine SA, SB i t. d. jesu pobočni bridovi, dok su stranica osnovnog mnogokuta (baze) osnovni bridovi. S je vrh piramide. Udaljenost vrha S od baze jest visina piramide.

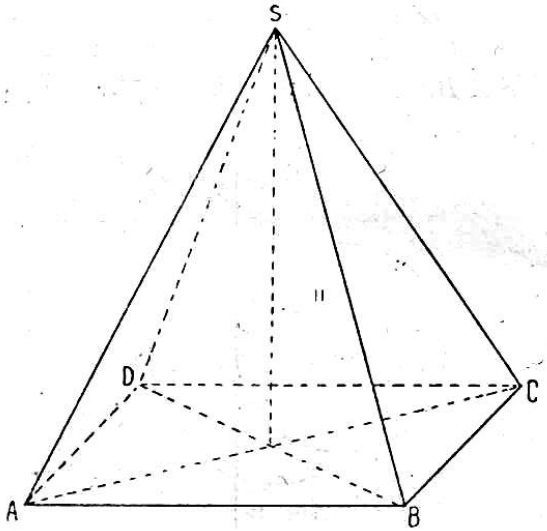
Ako je baza piramide pravilan mnogokut i ako vrh piramide leži okomito povrh središta baze, onda je piramida pravilna (slika 127.).

Kod pravilne piramide svi su pobočni bridovi jednaki, a pobočje sastoji od samih istokračnih trokuta.

2. Pravilna je piramida simetrično tijelo. Visina joj je os simetrije; drugih osi simetrije piramida nema. Svaka ravnina, koja ide visinom piramide i jednom osi simetrije osnovnog mnogokuta, jest ujedno i ravnina simetrije piramide. Prema tomu ima piramida toliko ravnina simetrije, koliko baza ima osi simetrije.



Sl. 126.



Sl. 127.

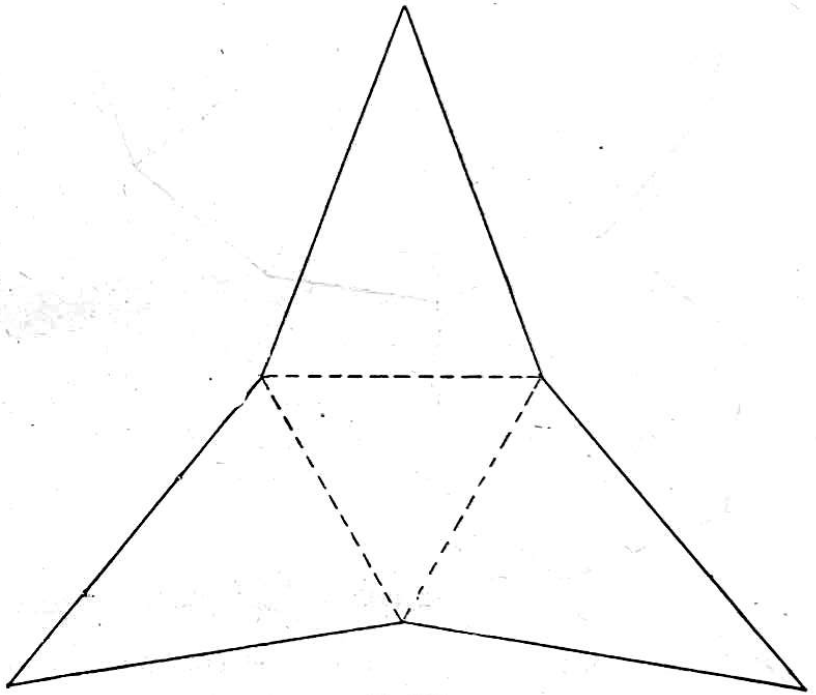
3. Mreža pravilne piramide sastoji od osnovnog mnogokuta (baze) i od istokračnih trokuta, kojima je osnovica osnovni brid piramide, a krakovi su im njezini pobočni bridovi. Mreža se može nacrtati ili tako, da su pobočni trokuti zvjezdoliko porazmješteni oko baze (slika 128.) ili pak tako, da se dotiču na svojim pobočnim bridovima (slika 129.).

4. Ako je piramida predočena svojim tlocrtom i nacrtom, onda valja paziti na ovo: Na tlocrtu imamo predočene osnovne bridove u njihovoj pravoj veličini kao i kod prizme; ali u nacrtu nijesu predočeni pobočni bridovi uvijek u svojoj pravoj veličini, kako to biva kod prizme, već im se prava veličina ima

istom da odredi jednostavnom konstrukcijom, kako ćemo pokazati na jednom jednostavnom primjeru.

Neka je na pr. zadana jedna trostrana piramida svojim tlocrtom i nacrtom (slika 130.). Osnovni bridovi AB, BC, CA redom su jednaki njihovim tlocrtima A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1; to isto vrijedi za visinu piramide, koja je jednaka svome nacrtu S_2Q.

Da nađemo pravu veličinu pobočnog brida na pr. AS, konstruirat ćemo pravokutan trokut s katetama S_2Q i A_1S_1. Hipotenuza pravokutna trokuta tako dobivena bit će traženi pobočni brid AS u svojoj pravoj veličini.



Sl. 128.

Odatle se učimo još i to, kako se može naći prava veličina jedne dužine AS, ako su zadani njen tlocrt A_1S_1 i njen nacrt A_2S_2.

Primjeri: 1. Nacrtaj mrežu trostrane piramide, kojoj su svi bridovi jednaki (4 cm) i sastavi dotično tijelo (pravilni tetraedar) i opiši ga.

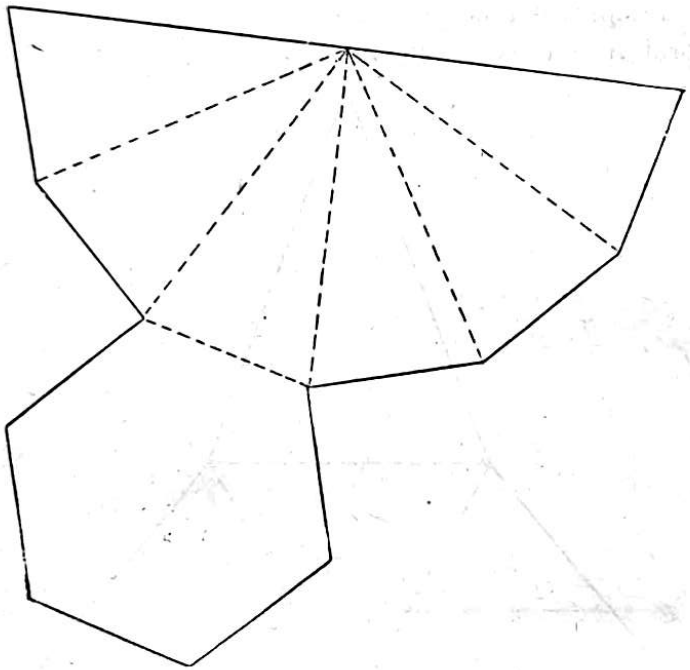
2. Nacrtaj mrežu i sastavi model pravilne četverostrane piramide, kojoj je osnovni brid 4 cm, a pobočni 6 cm.

3. Nacrtaj mrežu i sastavi model isto takove piramide s osnovnim bridom od 4 cm i visinom od 5 cm.

4. Iz slike 130. odredi konstrukcijom dužinu bridova BS i CS, zatim oblik pobočnih trokuta i napokon mrežu piramide.

5. Sastavi model piramide, koja je zadana u slici 130. svojim tlocrtom i nacrtom tri puta umanjena.

6. Pravilna trostrana piramida ima osnovni brid oko 4 cm, a visinu od 5 cm; nacrtaj joj tlocrt i nacrt i mrežu.



Sl. 129.

7. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilne četverostrane piramide s osnovnim bridom od 4 cm i visinom od 5 cm.

8. Pravilna šesterostrana piramida ima osnovni brid od 4 cm i visinu od 6 cm; nacrtaj joj tlocrt, nacrt i mrežu.

9. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilna tetraedra, kome je brid 4 cm dug. Vidi zadatak 1.

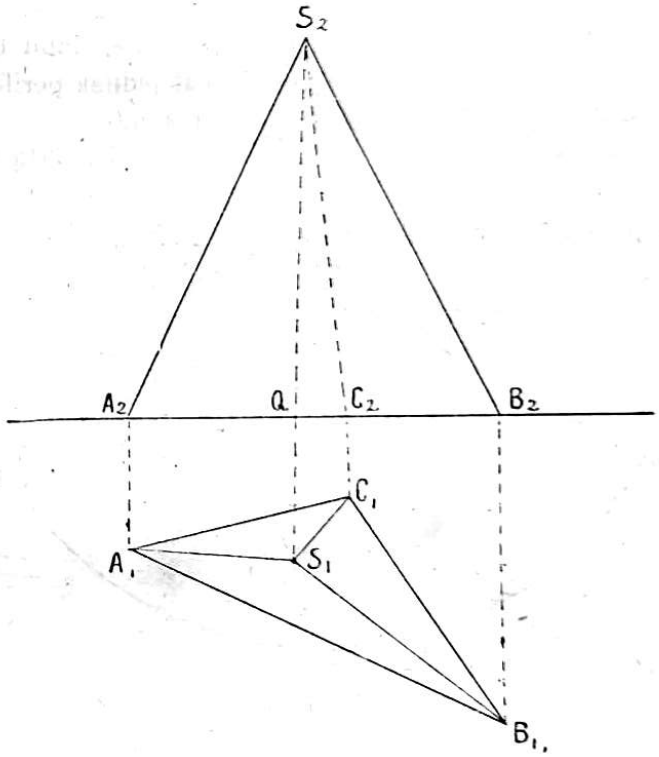
§ 35. Stožac.

1. Ako baza piramide postane krug, prelazi piramida u stožac. Ako vrh stošca spojimo s jednom točkom na periferiji baze,

dobivamo stranicu stošca. Stožac je omeđen jednom bazom, koja je krug i plaštem, koji je zakrivljena ploha. Stranice stošca jesu na toj zakrivljenoj plohi jedini pravci, koji se dadu na njoj povući.

Ako vrh stošca leži okomito nad središtem baze, onda imamo uspravni stožac. Kod uspravnog stošca sve su stranice jednake, a plašt mu je kružni isječak, kome je luk jednak periferiji baze.

Udaljenost vrha od baze jest visina stošca. Kod uspravnog stošca jest visina ujedno i os njegove simetrije. Sve ravnine, koje idu kroz tu os simetrije, jesu ravnine simetrije stošca

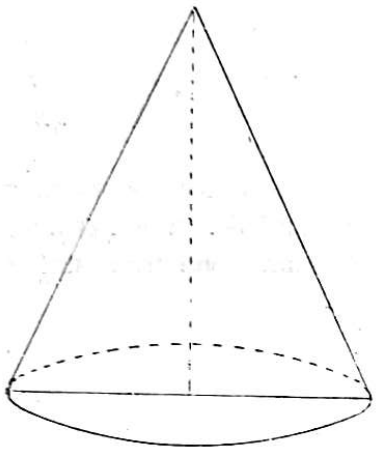


Sl. 130.

(slika 131.). Uspravan stožac je kao i valjak rotaciono tijelo, koje nastaje vrtnjom pravokutna trokuta oko jedne katete.

2. Mreža uspravna stošca sastoji od kruga (baze) oko O i jednog kružnog isječka $O_1 A B$ (plašta). Polumjer toga isječka $O_1 A$ jednak je stranici stošca, a luk $\widehat{AB}$ jednak je opsegu baze.

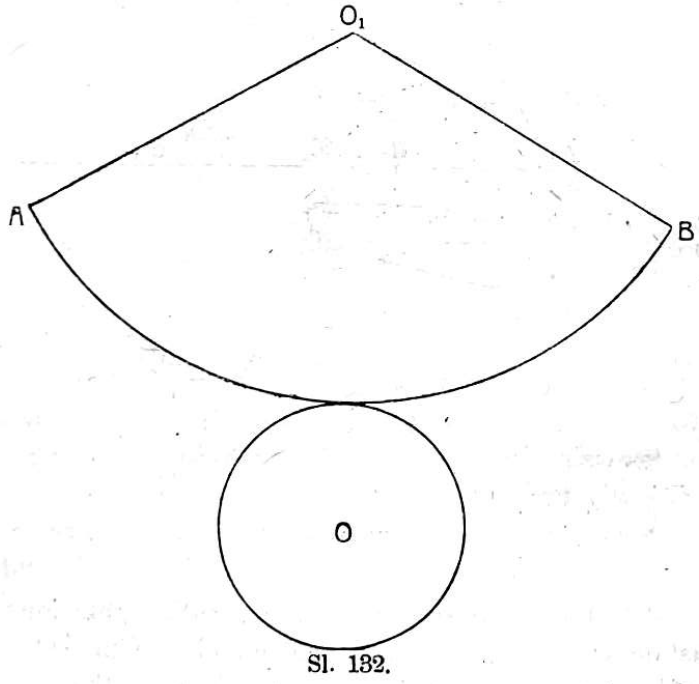
Kako ćemo dakle nacrtati mrežu zadanog jednog modela stošca, kome je polumjer baze 1·5 cm, a stranica mu je na pr. 3 puta veća od tog polumjera, dakle 4·5 cm?



Sl. 131.

Nacrtamo najprije krug polumjera 1·5 cm (slika 132.) oko središta O. Zatim uzmemo u daljini od 1·5 cm + 4·5 cm = 6 cm središte drugog kruga O_1; taj se drugi krug ima onog prvog doticati. Cijeli opseg tog drugog kruga bit će tri puta veći od opsega baze; ako uzmemo $^1/_3$ cijele periferije, dobit ćemo luk, koji će biti baš jednak periferiji baze, kako to i ima biti.

3. Iz tlocrta i nacrta uspravna stošca dobivamo lako način, kako se nađe prava veličina dužine, koja je zadana tlocrtom i nacrtom.



Sl. 132.

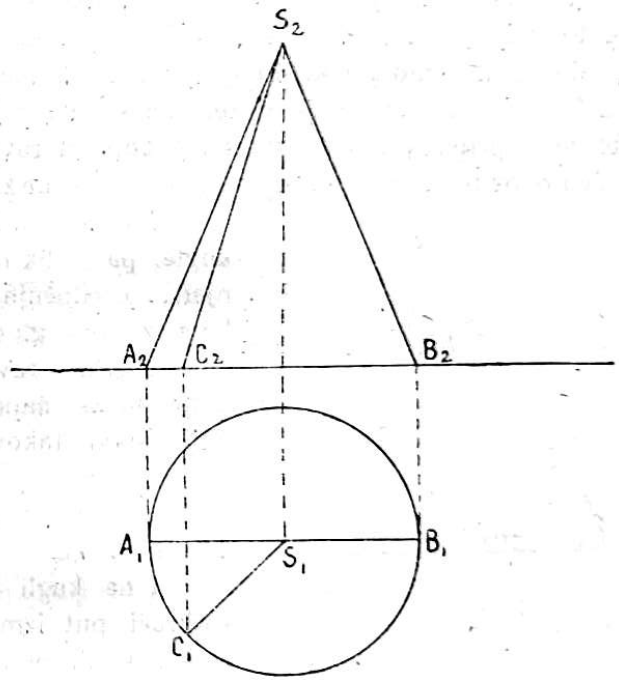
Neka je $S_1 C_1$ tlocrt, a $S_2 C_2$ nacrt dužine $S C$, koja se ima nacrtati u pravoj veličini. Kako su u stošcu sve stranice jednake, to će biti $S C = S A$, a $S A$ je nacrtana u pravoj veličini, jer je njen nacrt $S_2 A_2 = S A$ (slika 133.).

Primjeri: 1. Nacrtaj mrežu uspravna stošca, komu je stranica dva puta veća od polumjera baze.

2. Nacrtaj mrežu uspravna stošca, kome je stranica četiri puta veća od polumjera baze.

3. Isto, ako je stranica $1^1/_2$ puta veća od polumjera baze.

4. Isto, ako je stranica 4 cm, a polumjer 3 cm (stranica je $1^1/_3$ puta veća od polumjera baze).



Sl. 133.

5. Nacrtaj tlocrt i nacrt uspravna stošca, komu je prerez po osi istostran trokut sa stranicom od 4 cm.

6. Pravokutan trokut, kome je hipotenuza 5·3 cm, a jedna kateta 3·8 cm, vrti se oko katete, koja nije zadana; nacrtaj tlocrt i nacrt stošca, koji tako nastane.

7. Nacrtaj tlocrt i nacrt stošca, komu je stranica tri puta veća od polumjera baze.

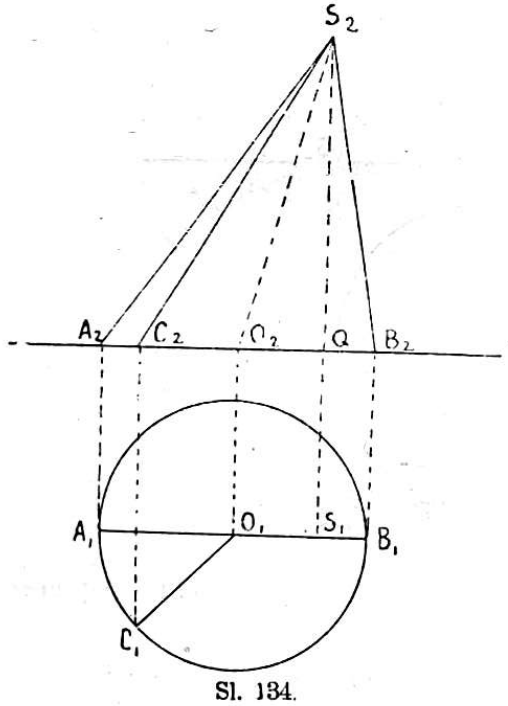
8. Kosi stožac zadan je svojim tlocrtom i nacrtom. Konstruiraj mu nekoliko stranica u pravoj veličini. Koja je najveća, a koja najmanja njegova stranica? (Slika 134.)

9. U slici 135. zadane su tri dužine AB, CD, EF svoim tlocrtom i nacrtom; konstruiraj prave veličine tih dužina.

§ 36. Kugla.

1. Geometrijska tjelesa, koja smo opisali do sada, ili su bila omeđena ravnim mnogokutima ili su se, ako su bila obla, kao što su to valjak i stožac, dala razviti u ravninu. To razvijanje u ravninu zvali smo konstruiranjem mreže dotičnoga tijela.

Kugla je pak površina svoje vrste, ona se u ravninu razviti ne da, zato joj i pripadaju neka svojstva, kojih u ravnini nema i na koja ćemo ovdje upozoriti. Kugla nema mreže.



Sl. 134.

I naša zemlja ima oblik kugle, pa se lik njen, umanjen, predočuje kuglom, koja se zove globus.

2. Ako u ravnini spojiš dvije točke napetom niti, onda nam takova napeta nit predočuje pravac, kao najkraći put između te dvije zadane točke.

I na kugli češ dobiti najkraći put između dvije točke, ako ih spojiš napetom niti, samo što to ne će biti više pravac, već luk jednoga kruga.

Takov krug dijeli kuglu na dva jednaka dijela i zove se **glavni krug kugle.**

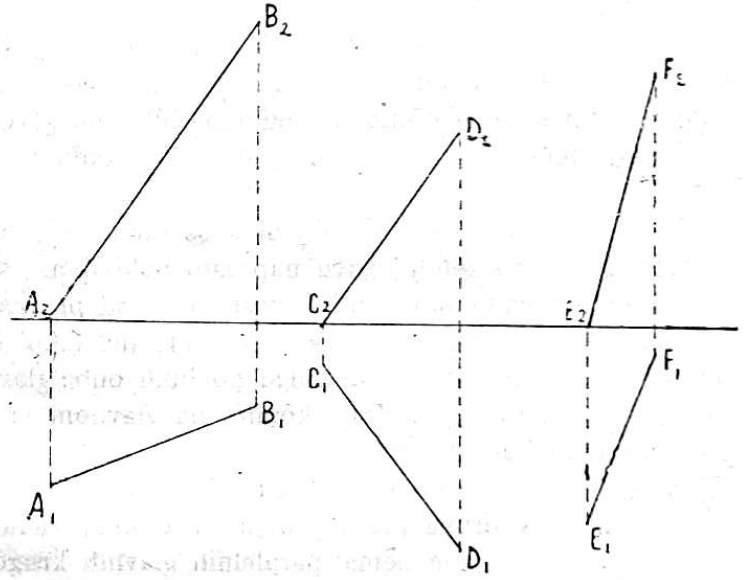
Svaki promjer (dijametar) glavnog kruga siječe površinu kugle u dvije točke, koje se zovu dijametralne točke kugle. Na našoj zemlji su dijametralne točke antipodi.

Kroz dvije dijametralne točke na kugli možeš povući, koliko hoćeš glavnih krugova; kroz svake dvije točke na kugli, koje nijesu dijametralne, možeš povući samo jedan jedini glavni krug.

Svi su glavni krugovi na kugli jednaki.

3. Udaljenost dviju točaka na kugli mjeri se stupnjevima luka glavnog kruga, koji spaja one dvije točke. Jedna minuta (1') glavnog kruga na zemlji zove se jedna morska milja i ima od prilike 1853 m.

Što je dakle u ravnini pravac, to je na kugli glavni krug, i odatle izviru sve razlike u svojstvima ravnine i kugle.



Sl. 135.

4. Osim glavnih krugova, za koje vidjesmo, da odgovaraju pravcima u ravnini, ima na kugli još i drugih krugova, koje nazivljemo sfernim krugovima za razliku od glavnih. Ti sferni krugovi na kugli jesu ono, što su u ravnini krugovi i dijele kuglu na dva nejednaka dijela.

Primjer glavnih krugova na globusu (na zemlji) daju nam ekvator i meridijani; a paralelni su krugovi primjer koncentričnih sfernih krugova. Svaki takav krug ima dva središta na kugli; kod paralela su to polovi, zato ih i možemo nazvati koncentričnim sfernim krugovima.

5. Dva se glavna kruga na kugli uvijek sijeku (u dvije dijametralne točke, meridijani na globusu); a budući da glavni krugovi odgovaraju pravcima ravnine, vidimo odatle, da na kugli nema paralela (paralelnih glavnih krugova) kao što ih ima u ravnini. A da će svojstva kugle zbog toga biti vrlo različna od svojstvâ, koja smo na ravnim likovima proučavali, slijedi već i odatle, što znamo, kako je u ravnini važan nauk o paralelama.

Dva se glavna kruga kugle mogu sjeći i pod kutom od 90°; u tom slučaju kažemo, da je jedan krug na drugom okomit.

Tako se sijeku na globusu meridijani i ekvator pod pravim kutom; meridijani su okomiti na ekvatoru i ekvator je okomit na meridijanima.

U ravnini su svi pravci, koji stoje okomito na jednom zadanom pravcu, među sobom paralelni; na kugli pak idu svi glavni krugovi, koji stoje okomito na jednom zadanom glavnom krugu, kroz dvije točke, koje se zovu polovi onog zadanog glavnog kruga.

Tako idu na globusu svi meridijani kroz polove ekvatora, koji se na globusu (i na zemlji) zovu naprosto polovima.

6. Kako se u ravnini mjeri udaljenost točke od pravca po okomici, spuštenoj iz zadane točke na zadani pravac, tako se na kugli mjeri daljina točke od glavnog kruga po luku onog glavnog kruga, koji ide onom točkom i stoji okomito na glavnom krugu, od koga se mjeri udaljenost točke.

7. U ravnini leže sve točke, koje su od zadana pravca jednako daleko, na dva druga pravca, koja su s onim zadanim paralelna. Na kugli pak, gdje nema paralelnih glavnih krugova, leže sve točke, koje su od jednog glavnog kruga jednako daleko, na dva sferna kruga, koji bivaju sve manji, što su te točke dalje od glavnog kruga.

Na globusu (i na zemlji) leže sva mjesta iste geografske širine jednako daleko od ekvatora.

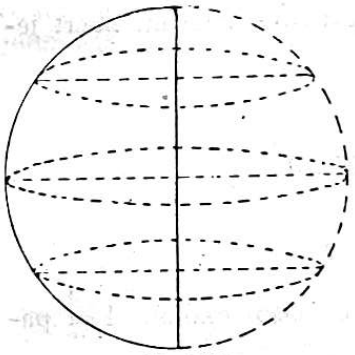
Najveća sferna daljina točke od glavnog kruga može da bude 90°. To je daljina polova od njihova glavnog kruga.

7. Na globusu dijeli ekvator kuglu na dva dijela, koja se zovu polutke ili hemisfere: sjeverna i južna; isto tako dijele i meridijani, koji pripadaju istomu krugu, kuglu na dvije hemisfere: istočnu i zapadnu. U opće svaki krug dijeli kuglu na dva dijela, koja se zovu kugline kapice ili kalote, dok se

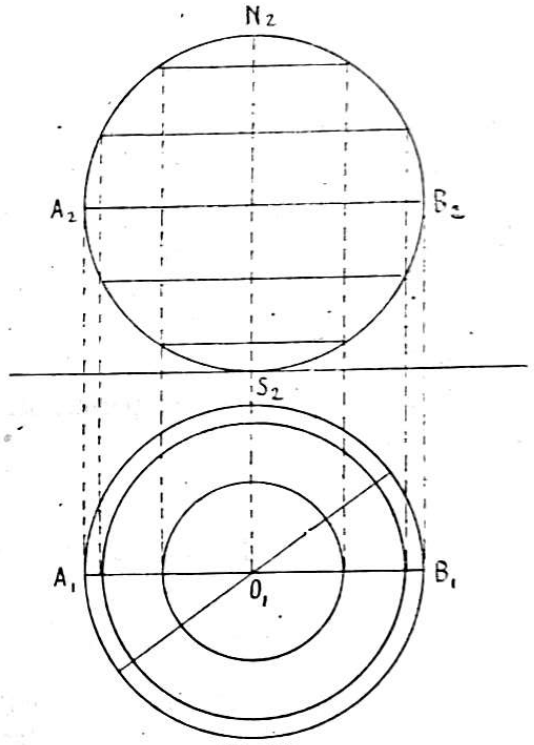
dio kugle, koji se nalazi između dva paralelna kruga, zove pojas ili zona. U geografiji: umjereni, vrući pojas; ledeni pojasi jesu zapravo kalote.

8. Kugla je simetrično tijelo. Svaka ravnina, koja siječe kuglu po jednom glavnom krugu, jest ravnina simetrije kugle. Dvije se ravnine simetrije sijeku u jednoj osi simetrije kugle. Svaki promjer bilo kojeg glavnog kruga jest os simetrije. Svaka ravnina, koja ide jednom osi simetrije, jest ujedno i ravnina simetrije kugle.

Odatle slijedi, da je i kugla kao i valjak i stožac, tijelo rotacije i nastaje vrtnjom jednog polukruga (slika 136.) oko njegova dijametra. Polumjer toga kruga bit će polumjer kugle,



Sl. 136.



Sl. 137.

a središte njegovo bit će središte kugle. Prema tomu su sve točke na površini kugle jednako daleko od njezina središta.

9. Kugla se dade predočiti tlocrtom i nacrtom tako, da konstruiramo dva jednaka kruga s polumjerom, koji je jednak polumjeru kugle. Slika 137. prikazuje nam tlocrt i nacrt globusa, koji se dotiče južnim polom ravnine tlocrta i kome je polumjer 2 cm. Paralelni krugovi tlocrta čine jedan sustav koncentričnih krugova, a u nacrtu su paralelni pravci. Izvanji krug predočuje u tlocrtu ekvator, dok je u nacrtu ekvator najveća

između paralelnih dužina, koje u nacrtu prikazuju paralelne krugove. Meridijani su u tlocrtu svi predočeni promjerima kruga, koji u tlocrtu predočuje ekvator.

Primjeri: 1. Koliko je daleko od ekvatora u morskim miljama i u kilometrima Zagreb s geografskom širinom 45° 50'; Rijeka s geogr. širinom 45° 19'?

2. Koliko su ta mjesta daleko od pola; obratnica, polarnih krugova?

3. Koliko su daleko polovi od ekvatora u kilometrima?

4. Nacrtaj tlocrt i nacrt globusa, komu polumjer ima 6 cm i koji se južnim polom dotiče ravnine tlocrta, dva puta umanjen. U toj figuri nacrtaj tlocrt i nacrt paralelnih krugova geografske širine 10°, 20° . . . 80°. Kako se mijenja polumjer paralelnog kruga, ako geografska širina raste?

5. Nacrtaj u tlocrtu meridijane geografske dužine 20°, 40°, 80° i t. d., ako je ravnina prvog meridijana paralelna sa ravninom nacrta, a globus predočen kao u primjeru 4.

6. Pokušaj s pomoću paralelnih krugova nacrtati nacrt jednoga meridijana.

VII. Opsezi i ploštine.

§ 37. Poređenje i dijelenje likova.

1. Pravokutnik je najobičniji lik u našoj okolini. List papira, na kom pišeš, površina stola, table, zidova, prozora i t. d., sve to ima oblik pravokutnika. Za nj se može reći, da je karakteristični lik naše građevne kulture.

Ploštinu smo pravokutnika izračunali, pa ćemo sada s njim uspoređivati druge likove, ponajprije paralelograme.

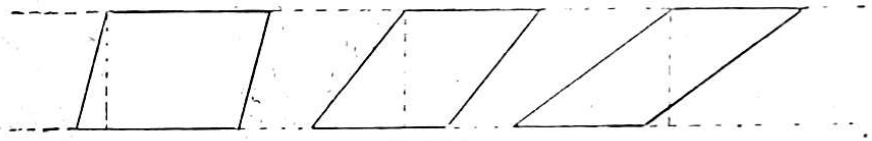
2. Razmak dviju suprotnih stranica paralelograma zovemo njegovom visinom, a jednu od tih stranica njegovom osnovicom ili bazom.

Nacrtaj dva paralelna pravca. Nacrtaj sada među njima više paralelograma, tako da im baza dođe na jednu od tih paralela, a suprotna joj stranica na drugu. Visine su svih tih paralelograma jednake (slika 138.).

3. Nacrtaj dva ili više paralelograma s bazom na jednom te istom pravcu i sve s jednakom visinom. Gdje leže bazi suprotne stranice tih paralelograma, ako nacrtaš sve visine s iste strane onog zadanog pravca?

Lako ćeš se uvjeriti, da suprotne stranice leže sve na jednom pravcu, koji je sa zadanim paralelan u razmaku, koji je jednak visini.

4. Nacrtaj dva paralelna pravca i na jednom uzmi dužinu AB. U krajnim točkama A i B te dužine nacrtaj okomice AD i BC; zatim povuci točkama A i B dvije paralele AE i BF.



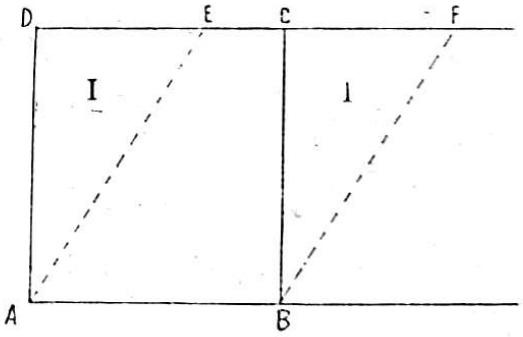
Sl. 138.

Ako četverokutu $ABEC$ dodaš s lijeva trokut I, dobit ćeš pravokutnik $ABCD$; dodaš li istom četverokutu isti trokut s desna, dobit ćeš paralelogram $ABEF$ (slika 139.).

Načini iz papira četverokut $ABEC$ i trokut I, pa pokaži, kako ćeš u jednom slučaju dobiti pravokutnik, a u drugom paralelogram.

5. Pravokutnik $ABCD$ i paralelogram $ABEF$ imaju jednake ploštine. Za dva lika, koja imadu jednake ploštine, kažemo da su jednaka.

Svaki je dakle paralelogram jednak pravokutniku, koji ima s njim jednaku osnovicu i jednaku visinu.



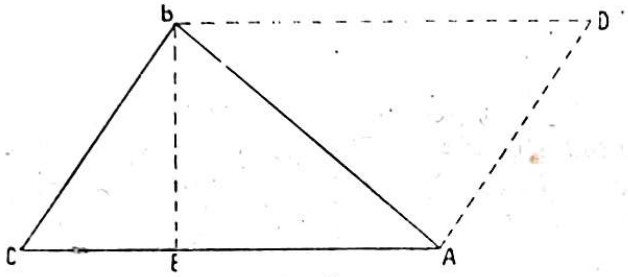
Sl. 139.

Paralelogrami s jednakom osnovicom i jednakom visinom jesu jednaki, jer su oni svi jednaki s jednim pravokutnikom, koji ima s njima jednaku osnovicu i jednaku visinu.

6. Vrhom A trokuta ABC nacrtaj paralelu sa stranicom BC, a vrhom B paralelu sa stranicom AC. Tako nastaje para-

lelogram, koji ima s trokutom istu bazu AC i visinu BE. No budući da su trokuti ABC i ABD jednaki, bit će trokut ABC polovina paralelograma (slika 140.).

Svaki je dakle trokut polovina paralelograma, koji ima s njim jednaku osnovicu i jednaku visinu.

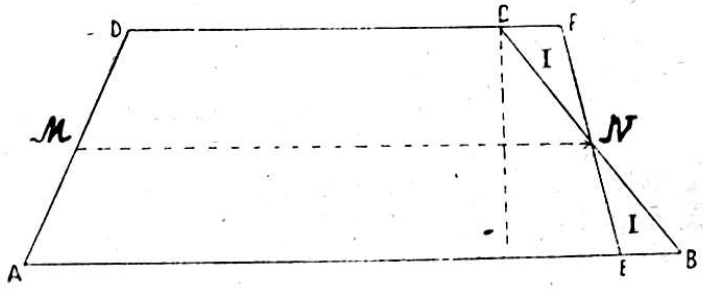


Sl. 140.

Dva su trokuta jednaka, kada imaju jednake osnovice i jednake visine, jer je svaki od njih polovina jednakog paralelograma.

Kod jednakih trokuta nad istom osnovicom leže vrhovi na pravcu, koji je s osnovicom paralelan.

7. Ako se vrh trokuta neprestano udaljuje od baze, raste s visinom trokuta ujedno i njegova ploština, ako se kod toga baza ne mijenja. Ploština je trokuta dakle funkcija visine, kad se ne mijenja baza.



Sl. 141.

8. Ako jednu stranicu paralelograma pričvrstimo a protivnu stranicu pomičemo po paraleli, na kojoj leži, ostaje doduše ploština jednaka, ali se mijenja opseg paralelograma i njegov oblik. Opseg je najmanji, kad paralelogram pređe u pravokutnik.

9. Visina trapeza je razmak njegovih paralelnih stranica; srednjica trapeza je dužina, koja spaja središta M i N njegovih krakova (slika 141.).

Ako točkom N trapeza povučemo dužinu EF, prelazi trapez $ABCD$ u drugi $ADEF$, koji mu je jednak poradi toga, što su trokuti označeni s I jednaki.

Prema tomu su dva trapeza jednaka, kada imadu jednake visine i jednake srednjice.

Kada će trapez preći u paralelogram? Kojemu je paralelogramu trapez jednak?

Primjeri: 1. Podijeli paralelogram paralelama s jednom stranicom na 2, 3, 4 i t. d. dijela.

2. Podijeli trokut na 2, 3, 4 i t. d. dijela.

3. Podijeli trapez na 2, 3, 4 i t. d. dijela.

4. Podijeli paralelogram pravcima, koji izlaze iz jednoga vrha na 4, 6, 8 dijelova.

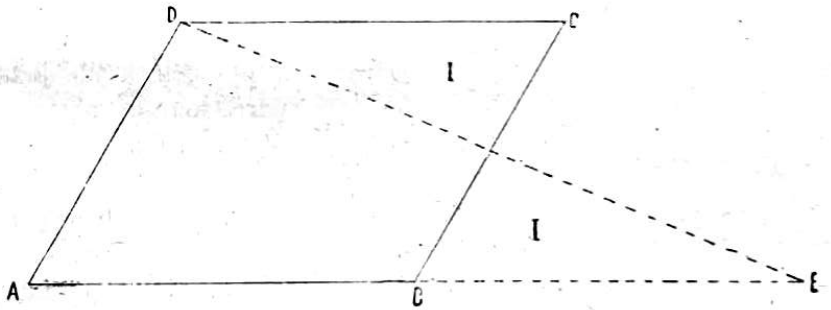
5. Podijeli isto tako paralelogram na 3, 5 dijelova. (Najprije podijeli paralelogram na 6, 10 dijelova i onda dva takova dijela spoji u jedan.

§ 38. Pretvaranje likova.

Zadani lik pretvoriti u drugi znači konstruirati lik, koji je sa zadanim jednak.

Zadaće: 1. Zadani paralelogram pretvori u trokut iste visine.

Neka je zadan paralelogram $ABCD$. Stranicu BC raspolovi, točkom D i polovištem stranice BC povuci pravac, koji



Sl. 142.

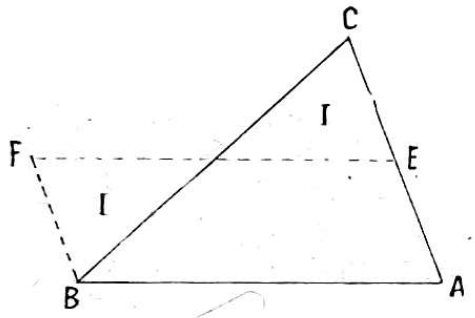
siječe produljenu bazu paralelograma u točki E. Trokut AED jednak je paralelogramu $ABCD$, jer su trokuti označeni sa I jednaki (slika 142.).

2. Zadani trokut pretvori u paralelogram iste osnovice.

Neka je ABC zadani trokut. Točkom B povuci paralelu sa stranicom AC, a polovištem stranice AC paralelu sa stranicom AB. Te se paralele sijeku u točki F. Paralelogram $ABFE$ jednak je trokutu ABC, jer su trokuti označeni s I jednaki (slika 143.).

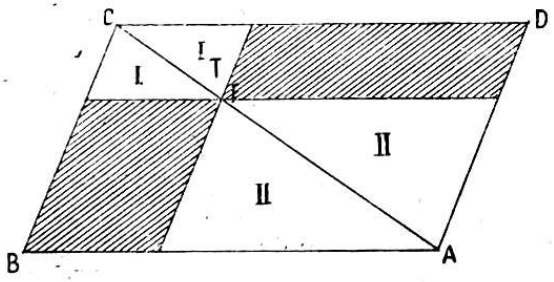
Nacrtaj paralelogram $ABCD$ i povuci jednu njegovu dijagonalu. Kakovi su trokuti, na koje se sada paralelogram raspao? (slika 144.)

Bilo kojom točkom T dijagonale povuci paralele s njegovim stranicama. Koliko je sada nastalo paralelograma oko točke T; koje od tih paralelograma dijagonala AC raspolavlja? Što će preostati, ako od trokuta ABC oduzmeš trokute označene s I i II? Što će preostati, ako od trokuta ACD oduzmeš isto tako velike trokute I i II? Kakovi su dakle preostali likovi? Odatle se učimo ovo:



Sl. 143.

Ako u jednom paralelogramu bilo kojom točkom jedne njegove dijagonale povučeš paralele s njegovim stranicama, nastaju četiri paralelograma. Ona dva od tih paralelograma, koje dijagonala ne presijeca, jesu jednaka.



Sl. 144.

Na toj se istini osnivaju konstrukcije s pomoću kojih jedan paralelogram pretvaramo u drugi.

Zadaća: Pretvori paralelogram u drugi zadane visine. (Slika 145.)

3. Neka je zadan paralelogram $ABCD$ i nova visina v. U razmaku v od osnovice AB povuci s njom paralelu. Stranice AD i BC produži dotle, dok ne presijeku tu paralelu u točkama E i F. Točku E spoji s vrhom A; dužina AE siječe stranicu CD paralelograma u točki T. Točkom T povuci paralelu sa stranicom AD, pa ćeš time dobiti još dvije točke

G i H. Paralelogram $AGHF$, s visinom v, jednak je paralelogramu $ABCD$, jer su paralelogrami označeni s I jednaki.

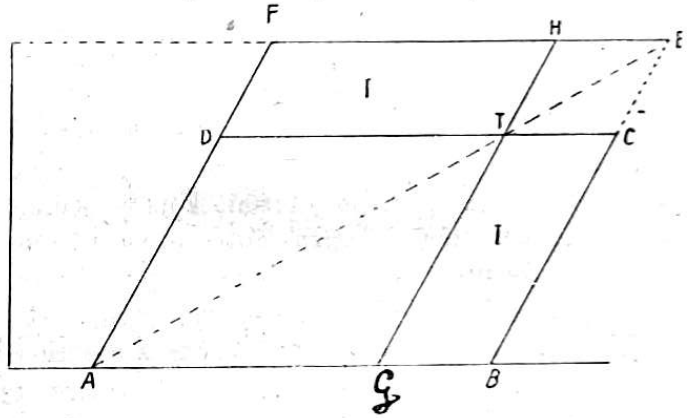
Izvedi takovu konstrukciju, ako je nova visina manja od visine zadana paralelograma.

Primjeri: 1. Zadani paralelogram pretvori: 1. u pravokutnik, 2. u romb, 3. u paralelogram zadane dijagonale tako, da mu stranica AB ostaje neizmijenjena.

2. Pretvori trokut ABC 1. u istokračan, 2. u pravokutan trokut tako, da mu stranica AB ostane neizmijenjena.

3. Pretvori trapez $ABCD$ u paralelogram tako, da mu kut kod A ostane neizmijenjen.

4. Pretvori trapez 1. u pravokutnik, 2. u romb.



Sl 145.

5. Pretvori zadani trapez u istokračan tako, da mu ostane neizmijenjen 1. kut kod A, 2. kut kod B.

6. Trapez pretvori u trokut.

7. Pretvori zadani paralelogram u drugi, koji će imati 1. veću, 2. manju osnovicu od zadana.

§ 39. Izračunavanje opsega.

1. Ravni lik kao dio ravnine omeđen je crtama. Skup svih crta, koje lik omeđuju, čine njegov opseg. Opseg ima stanovitu dužinu. Naći mjerenjem opseg lika, koji je omeđen samim dijelovima pravca, nije teško. Dijelovi se pravca izmjere i nađene dužine zbroje. Kod likova, koji pokazuju neku pravilnost, nije nužno, da se izmjere sve dužine, dovoljno će biti, da se izmjere

samo neke, a dužine drugih dobit ćemo zaključivanjem iz onih, koje smo izmjerili. Kod pravokutnika ili paralelograma uopće bit će dovoljno, ako izmjerimo po jednu od svakog para paralelnih stranica. Zbroj tih dviju stranica daje polovinu opsega; dvostruki zbroj dužinu cijelog opsega.

2. Kod pravilnih mnogokuta dovoljno je, da izmjerimo jednu njegovu stranicu i da dužinu te stranice pomnožimo s brojem stranica, pa da dobijemo opseg.

Veličina opsega pravilna mnogokuta potpuno je zadana, ako znamo dužinu jedne njegove stranice; opseg pravilna mnogokuta jest funkcija njegove stranice.

3. Ako je lik omeđen crtama, koje nijesu pravci, onda nije lako opseg izmjeriti, jer dužine mjerimo s pomoću pravca. Takov je lik krug. Naći opseg kruga ili njegovu periferiju znači naći jednu ravnu dužinu, koja će biti jednaka s dužinom periferije kruga, i onda tu dužinu izmjeriti. U nauci o prostoru mjeri se ta dužina dijametrom kruga; to jest pita se, koliko se puta dijametar kruga nalazi u onoj ravnoj dužini, koja je jednaka periferiji kruga. Dužina periferije kruga može se približno odrediti ovako. Uzme se tijelo, koje ima oblik valjka. Prerez valjka s ravninom, koja je paralelna s bazom, jeste krug. Ako uzmeš sada nit i njom točno jedamput opašeš valjak, to će ti ta nit, ako je ravno napneš, dati opseg kruga; ako još izmjeriš dijametar baze, i ispitaš, koliko se puta on nalazi u toj dužini, dobit ćeš periferiju kruga izraženu s pomoću dijametra. Ako na taj način izmjeriš periferije različnih krugova, naći ćeš prilično točno, da se dijametar kruga nalazi u njegovoj periferiji $3\frac{1}{7}$ puta.

Periferija kruga jest funkcija njegova dijametra (ili polumjera).

Periferija se kruga nađe, ako se njegov dijametar pomnoži s $3\frac{1}{7}$ (ili 3·14).

Treba međutim upamtiti, da je ovo samo približno ispravno; ali je za naše potrebe dovoljno.

Obrnuto, ako treba odrediti dijametar ili polumjer iz periferije, čini se to tako, da se periferija razdijeli sa $3\frac{1}{7}$, pa se dobije dijametar, ili da se periferija razdijeli sa $6\frac{2}{7}$ $(= 2 \cdot 3\frac{1}{7})$, pa se dobije polumjer.

4. Kad znamo naći opseg kruga, ne će nam biti teško izračunati dužinu luka, koji nam je zadan u stupnjevima. Ako luk

ima na pr. 35°, onda je on $\frac{35}{360}$ cijele periferije; dužinu luka ćemo naći, ako dužinu periferije pomnožimo s onim razlomkom.

Primjeri: 1. Kolik je opseg kruga, komu je polumjer 6 cm, 15 cm, $8\frac{3}{4}$ cm?

2. Kolik je opseg kruga, komu je polumjer 8·3 m, 6·25 m, 12·34 m?

3. Koliko je velik ekvator, ako mu je polumjer 6371 km?

4. Koliko se puta okrene kotač, kome je dijametar 1 m, na putu od 100 m?

5. Vreteno kotača na bunaru ima polumjer 20 cm i mora se 14 puta okrenuti, da konop dođe do dna; koliko je dubok bunar, ako vreteno stoji 1·25 m visoko?

6. Kolik je promjer kruga s opsegom 132 cm, 220 cm, 33 cm?

7. Kolik je polumjer kruga s opsegom 785 m, 486·7 m, 612·5 m?

8. Opseg je okrugla stola 264 cm. Kolik mu je promjer?

9. Opseg je okrugla debla 176 cm. Koliko je ono debelo?

10. Dužina meridijana je 40.000 km; kolik mu je polumjer?

11. Koliko je velik luk, koji ima 60°, 45°, 36°, 24°, 144° u krugu, komu je polumjer 14 cm?

§ 40. Izračunavanje ploština paralelograma, trokuta, trapeza.

1. Paralelogram. Vidjeli smo, da je svaki paralelogram jednak pravokutniku, koji ima s njim jednaku bazu i jednaku visinu, a ploštinu pravokutnika odredimo tako, da načinimo produkt od njegove baze i visine. Prema tomu će i ploština svakog paralelograma biti jednaka produktu od njegove baze i visine. Ako nam a znači mjerni broj baze, v mjerni broj visine, P mjerni broj ploštine, pisat ćemo gore izrečeno pravilo aritmetičkim znakovima ovako:

$$P = a \cdot v.$$

Odavle pak dobivamo:

$$a = \frac{P}{v} \text{ i } v = \frac{P}{a}.$$

Bilješka 1. Valja pamtiti, da se i baza i visina moraju zadati ili izmjeriti istom jedinicom dužine (na primjer centimetrima); jedinica za ploštinu bit će kvadrat, konstruiran na jedinici dužine (dakle kvadratni centimetar, ako je jedinica dužine centimetar).

Neka je na pr. baza dugačka 7 cm, a visina 3 cm, to će ploština imati 21 cm^2. Hoćemo li istu ploštinu izraziti u mm^2, imat će baza 70 mm, a visina 30 mm, prema tomu ista ploština 2100 mm^2.

Bilješka 2. U kvadratu je visina v jednaka stranici a, pa ćemo dobiti ploštinu kvadrata po formuli:

$$P = a^2.$$

Iz ove pak formule slijedi:

$$a = \sqrt{P}.$$

Iz ovog će nam biti jasno, zašto se u aritmetici druga potencija običava nazivati kvadratom.

2. Trokut. Kako je svaki trokut polovina paralelograma, koji ima s njim jednaku bazu i jednaku visinu, dobit ćemo ploštinu trokuta, ako produkt od baze i visine razdijelimo sa 2.

Za ploštinu trokuta imamo dakle formulu

$$P = \frac{a \cdot v}{2}.$$

Odatle pak slijedi lako:

$$a = \frac{2\,P}{v} \text{ i } v = \frac{2\,P}{a}.$$

Bilješka. 1. Svaku stranicu trokuta možemo smatrati njegovom bazom; a prema tomu, koju baš stranicu uzimamo za bazu, moramo za visinu uzeti okomicu spuštenu iz protivna vrha na tu stranicu.

Bilješka 2. Ako kod trokuta ili paralelograma ostaje baza (visina) neizmijenjena ili konstantna, a visina (baza) biva dva, tri, četiri ... puta veća, onda i ploština biva dva, tri, četiri ... puta veća; ili ploština je razmjerna (proporcionalna) s visinom (bazom). To se može u matematičkom govoru, kako je to već prije bilo rečeno, izreći i ovako: Ploština trokuta ili paralelograma jest uz konstantnu bazu (visinu) funkcija visine (baze).

Izraz „konstantna baza“ znači, da se baza ne mijenja. U opće je „konstanta“ u matematici izraz za veličinu, koja svoje vrijednosti ne mijenja.

Bilješka 3. Izraz matematički

$$P = a\,v,$$

ako je u njemu a konstantna veličina, čita se: P (ploština) jest proporcionalna sa v (visinom).

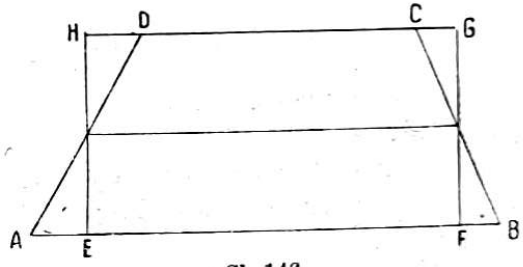
Zadaća: Kako možeš kod paralelograma pomicati stranicu, koja leži nasuprot čvrstoj bazi; ili kako možeš kod trokuta pomicati vrh, koji leži nasuprot čvrstoj bazi, a da ploština ostane konstantna?

3. Trapez. Trapez je jednak pravokutniku, koji ima s njim jednaku visinu, a baza mu je jednaka srednjici trapeza (slika 146.).

Prema tomu će biti ploština trapeza jednaka produktu od njegove srednjice i visine. Ako m znači mjerni broj srednjice, a v mjerni broj visine, pisat ćemo formulu za ploštinu trapeza:

$$P = m \cdot v.$$

Ali trapez je također jednak trokutu, koji ima s trapezom jednaku visinu; baza tog trokuta bit će jednaka zbroju paralelnih stranica trapeza. Prema tomu bit će ploština trapeza jednaka polovini produkta od zbroja paralelnih stranica trapeza i njegove visine. Ako sa a i b označimo mjerne brojeve paralelnih stranica trapeza, bit će formula za njegovu ploštinu:



Sl. 146.

$$P = \frac{(a+a)}{2} \cdot v.$$

Bilješka. Produkti $m \cdot v$ i $\frac{a+b}{2} \cdot v$ jesu jednaki, jer nam svaki od njih daje isti broj, naime mjerni broj jedne te iste ploštine. Pošto pak ova dva produkta imaju svaki po jedan faktor v, koji je u oba produkta jednak, moraju da budu i ona druga dva faktora jednaka. Mora dakle da bude:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

t. j. u trapezu je srednjica jednaka polovini zbroja paralelnih stranica.

Zadaća: Ispituj, kada je ploština trapeza funkcija trapezovih paralelnih stranica, visine ili srednjice.

Primjeri: 1. Pravokutnik sa stranicama 9 i 16 cm pretvori se u trokut s bazom od 24 cm. Kolika je visina trokuta?

2. Kvadrat, kome je stranica 56 cm, pretvori se u trokut visine 64 cm. Kolika je baza trokuta?

3. Dijagonala kvadrata je 2·48 m. Kolika mu je ploština?

4. Romb ima dijagonale 8·75 cm i 12·48 cm dugačke. Kolika mu je ploština?

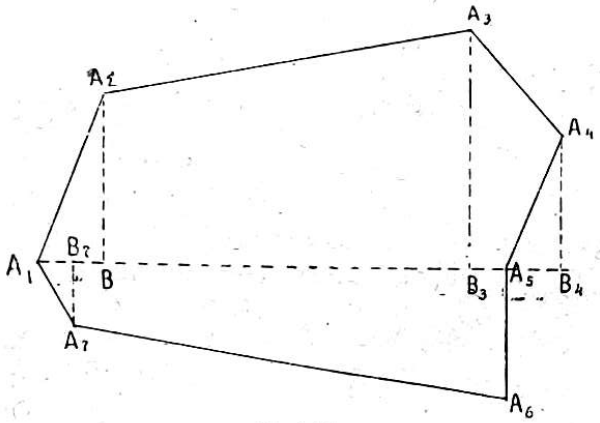
5. Gradilište ima oblik četverokuta, a najveća njegova dijagonala ima 55·48 m. Vrhovi druge dijagonale udaljeni su od prve 16·24 dotično 21·76 m. Koliko je ovo gradilište stojalo, ako se kvadratni metar prodao po 75 K?

6. Svako od 6 stakala na uličnoj svjetiljki ima oblik trapeza s paralelnim stranicama 24 cm i 12 cm i visinom 37·5 cm; koliko m^2 stakla treba za jednu takovu svjetiljku?

§ 41. Ploštine nepravilnih mnogokuta.

Da se odredi ploština bilo kakova mnogokuta, razdijeli se on ili dijagonalama ili pravcima, koji spajaju jednu njegovu nutarnju točku s vrhovima, na same trokute. Ploština tih trokuta se odredi i napravi njihov zbroj, koji je jednak ploštini zadana mnogokuta.

Kod mjerenja i izračunavanja ploština poljâ postupa se drukčije. Tu se odredi jedna dužina kao os (najzgodnije je uzeti



Sl. 147.

za to najdužu dijagonalu). Iz svih vrhova mnogokuta spuste se na tu os okomice, kojima se izmjeri dužina *(y)*. Osim toga se izmjeri daljina *(x)* pojedinih nožišta tako dobivenih okomica od

jednoga kraja osi. Tim je okomicama mnogokut podijeljen na same trapeze i trokute, kojima se ploština može lako izračunati (slika 147.).

Svaki vrh mnogokuta određen je sada sa dvije dužine x i y, koje se zovu njegove koordinate. Ako je dužina y ispod osi, onda joj dajemo negativan znak. S pomoću koordinata možemo zemljište, koje smo tako izmjerili, u umanjenom mjerilu također nacrtati.

Primjeri: 1. Pokušaj tako izmjeriti i nacrtati dvorište, vrt ili bilo koje drugo omanje zemljište.

2. Slika 147. predočuje nacrt zemljišta u 1000 puta umanjenom mjerilu s osju $A_1 A_5$. Neka se odredi ploština, ako je izmjereno:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
x	0	10·5	54·2	69·7	61·2	61·2	5·3 m
y	0	21·4	37·4	19·7	0	— 20·4	— 12·7 m

3. Nacrtaj u 2000 puta umanjenom mjerilu i izračunaj ploštinu, ako je izmjereno:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
x	0	122·5	296·7	218·4	170·3	45 m
y	0	61·4	0	— 51·6	— 42·4	— 65·2 m

4. Nacrtaj u 1000 puta umanjenom mjerilu i izračunaj ploštinu, ako je izmjereno:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
x	0	15	50·6	50·6	56	40·2	20·8	8 m
y	0	18	10·8	18·6	0	— 20·4	— 21·4	— 26·2 m

§ 42. Ploština pravilnih mnogokuta i kruga.

1. Pravilan mnogokut. Ako je mnogokut pravilan, onda se on pravcima, koji spajaju njegovo središte s vrhovima, može podijeliti na same istokračne trokute (slika 148.). Sada

se odredi ploština jednoga od tih trokuta i pomnoži s brojem, koliko tih trokuta ima, a ima ih toliko, koliko mnogokut ima stranica. Ako mjerni broj stranice mnogokuta označimo sa a, broj stranica u mnogokutu sa n, visinu jednoga od spomenutih trokuta sa v, bit će ploština pravilna mnogokuta, zadana formulom:

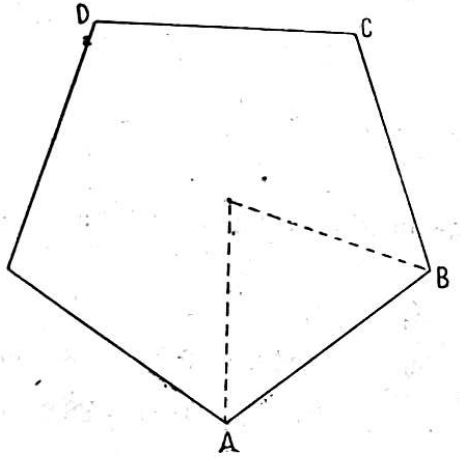
$$P = \frac{n a \,.\, v}{2}.$$

pošto pak produkt na znači dužinu stranice pomnoženu s brojem stranica, nije taj produkt drugo, nego opseg mnogokuta o. Dakle se formula za ploštinu pravilna mnogokuta može također pisati u obliku:

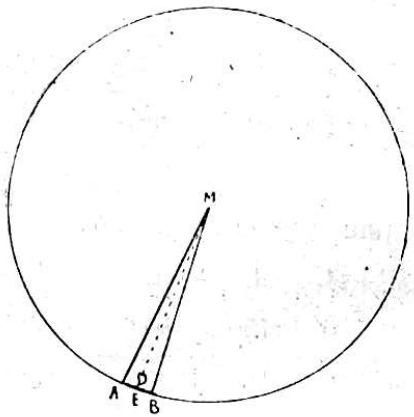
$$P = \frac{o \,.\, v}{2}.$$

Ploština pravilna mnogokuta jednaka je dakle polovini produkta njegova opsega i daljine jedne stranice od središta mnogokuta, jer nam v mjeri ujedno i tu daljinu.

2. Krug. Slika 149. neka nam predočuje jedan od trokuta, u koji se raspada u krug upisani pravilan mnogokut, ako ga razdijelimo na trokute onako, kako je to rečeno bilo.



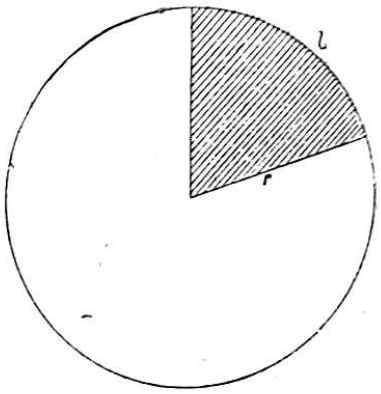
Sl. 148.



Sl. 149.

Zamislimo sada, da broj stranica spomenuta mnogokuta biva sve veći i veći, to će odsječak kruga ABE bivati sve manji i manji, tetiva kruga AB tako će doći blizu luku $\overset{\frown}{AB}$, da se od njega više ni razlikovati ne će moći. Mnogokut sa 360 stranica

ne može se više razlikovati od kruga, a još manje mnogokuti, koji imaju veći broj stranica. Visina trokuta MD ne će se više moći razlikovati od polumjera kruga ME, a opseg mnogokuta podudarat će se, rastući neprestano, sve to bolje s opsegom kruga. No pravilo za izračunavanje ploštine mnogokuta ostaje valjano, makar kolik bio broj njegovih stranica. Iz toga slijedi, da će formula za izračunavanje ploštine mnogokuta vrijediti i za krug; ploština kruga bit će dakle jednaka polovini produkta njegova opsega s visinom jednoga od onih trokuta, kojima se baza sve više približuje opsegu kruga, i koja visina konačno prelazi u polumjer. Imat ćemo dakle, ako sa r označimo polumjer kruga, formulu za njegovu ploštinu:



Sl. 150.

$$P = \frac{2r \,.\, 3\frac{1}{7} \,.\, r}{2} = r^2 \,.\, 3\tfrac{1}{7} = r^2\pi,$$

ako sa π označimo broj, za koji smo prije našli, da je približno jednak sa $3\frac{1}{7}$. Obrnuto nađe se r, ako je zadano P, iz jednadžbe

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}.$$

Ploština kruga jest funkcija njegova polumjera.

3. Kružni isječak (sektor). Ploštinu kružnog isječka naći ćemo također na način, kojim smo našli ploštinu kruga (slika 150.). Samo će tada na mjesto opsega kruga doći luk isječka; imat ćemo dakle, ako sa l označimo mjerni broj za dužinu luka, formulu za ploštinu isječka:

$$P = \frac{l r}{2}.$$

Primjeri: 1. Kolika je ploština kruga s polumjerom 6 cm, 15 cm, $8\frac{3}{4}$ cm?

2. Kolika je ploština kruga s polumjerom 8·3 m, 6·25 m, 12·34 m?

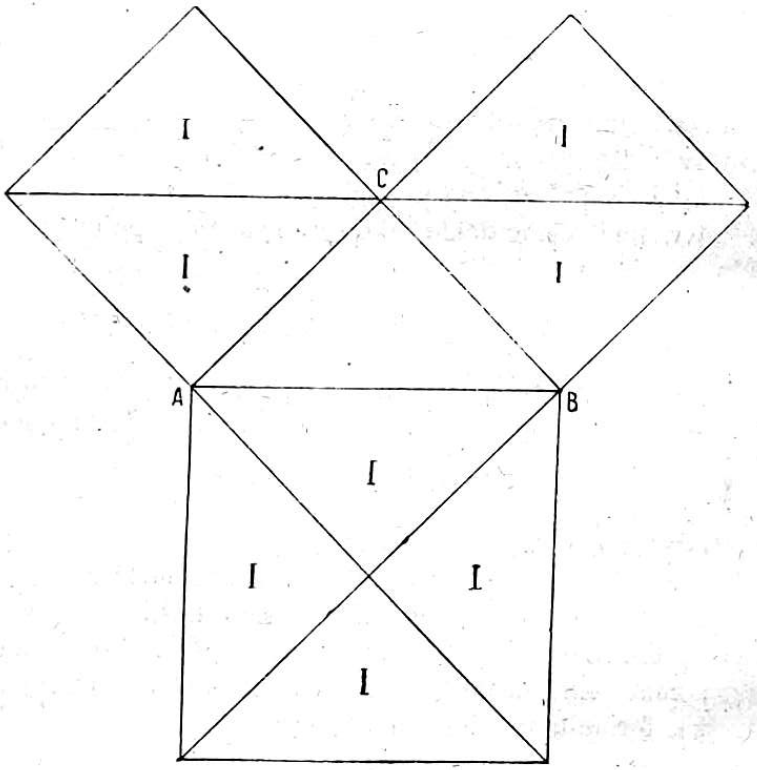
3. Kolika je ploština isječka, komu kut na središtu ima 60^0, 45^0, 36^0, 24^0, 144^0 u krugu s polumjerom 14 cm?

4. Ploština kruga ima $3\frac{1}{7}$ m², $12\frac{4}{7}$ m², $28\frac{2}{7}$ m²: kolik mu je polumjer?

5. Ploština kruga ima 12·56 m², 28·26 m², 88·5 m²; kolik mu je polumjer ($\pi = 3{\cdot}14$)?

§ 43. Pitagorin poučak.

1. Za konstruktivno određenje pravokutna trokuta dovoljna su, kako je to već bilo u ovoj knjizi istaknuto, dva podatka. To znači, da je iz dva podatka. potpuno određen svaki komad pravo-



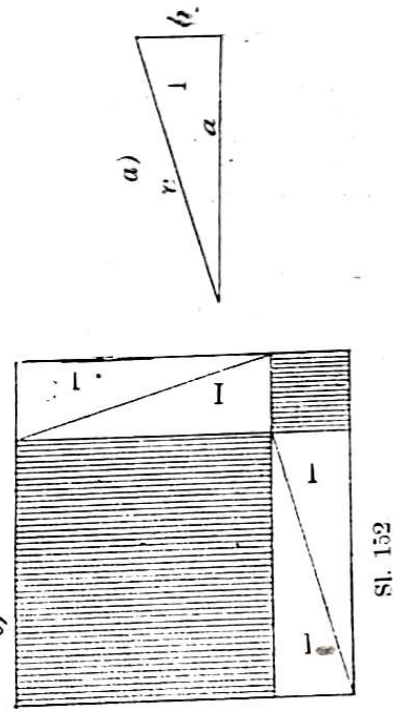
Sl. 151.

kutna trokuta; svaki dakle drugi komad njegov zavisi od ova dva podatka. Ta dva podatka ne mogu da budu, naravno, dva kuta.

2. Ako su dakle u pravokutnu trokutu zadane dvije stranice, treća ne može više da bude povoljna, ona je sa one druge dvije potpuno određena, ona od njih zavisi, ili, kako smo to već

naučili govoriti, ona je njihova funkcija. Tu zavisnost možemo također opisati; još više, treću stranicu moći ćemo pače izračunati, ako su nam poznati mjerni brojevi od druge dvije. Zavisnost hipotenuze od kateta opisana je poučkom, koji je poznat pod imenom Pitagorina poučka.

3. Za pravokutan istokračan trokut vrlo je lako taj poučak pokazati. Neka je (slika 151.) ABC takov trokut i AB njegova hipotenuza. Povrh stranica toga trokuta nacrtaj kvadrate, pa ćeš lako vidjeti, da kvadrat hipotenuze ima četiri jednaka trokuta, dok svaki kvadrat katete ima dva isto takova trokuta, koja su u slici označena sa I. Dakle je **kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata obiju kateta.**



Sl. 152.

1. Ovo, što je ovdje pokazano za istokračan pravokutan trokut, dade se, ako i ne tako jednostavno, pokazati i za svaki drugi pravokutan trokut.

U slici 152. *a)* nacrtan je pravokutan trokut, kome su a i b katete, a c hipotenuza, i koji ćemo još kraće označiti s I. U slici 152. *b)* i *c)* nacrtana su dva jednaka kvadrata; od svakoga ovoga kvadrata odrezat ćemo četiri puta trokut I samo na drugim mjestima, kako se to na slici vidi. Kada to učinimo, ostat će nam u slici 152. *b)* kvadrat hipotenuze, a u slici 152. *c)* dva kvadrata kateta. Ti su ostaci, naravno, jednaki. Dakle:

U svakom je pravokutnom trokutu kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata obiju kateta.

To je poučak Pitagorin.

Historijska bilješka. Pitagora je bio grčki filozof i matematik u VI. vijeku prije Isusa. Mnogo toga, što je on iz nauke o prostoru otkrio, sadržano je, kako se danas misli, u glasovitom djelu o prostoru, koje je poznato pod imenom „Euklidovi elementi". To je djelo napisao Euklid, koji je, kako bismo to danas rekli, bio profesor u sveučilištu u Aleksandriji i živio kojih 200 godina iza Pitagore. Sveučilište u Aleksandriji zvalo se muzeum, pa je to ime još i danas ostalo, ako i u drugom značenju (naši „muzeji"). Uz Euklida dala nam je grčka starina još dva velika matematika: iz opće povijesti poznatog vam Arhimeda i Apolonija uz, dakako, veliko mnoštvo manje poznatih. Elementi Euklidovi služili su sve do u današnji vijek kao udžbenik za nauku o prostoru (geometriju). Poučak Pitagorin sadržan je gotovo na početku Euklidovih elemenata.

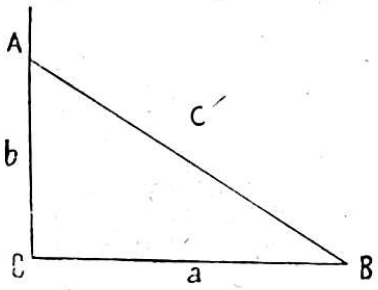
§ 44. Primjena Pitagorina poučka.

1. Pitagorin je poučak vrlo važan zbog svojih primjena.

On nas prije svega uči, kako možemo dva kvadrata sastaviti u jedan. Ali s pomoću njegovom može se riješiti i ova

Zadaća. Pretvori tri kvadrata sa stranicama a, b, c u jedan.

Ta se zadaća riješi tako, da se najprije sastavi pravokutan trokut s katetama a, b i povuče hipotenuza, koja mu pripada. Na jednom kraju te hipotenuze podigne se okomica dužine c i nacrta se hipotenuza tog novog pravokutnog trokuta; a ona je stranica traženog kvadrata.



Sl. 153.

Zadaća. Konstruiraj kvadrat, koji je jednak razlici dvaju zadanih kvadrata.

Ako je (slika 153.) $BC = a$ stranica manjega kvadrata, nacrtaj u C okomicu na tu stranicu neodređene dužine. Uzmi sada stranicu c većega kvadrata u šestar i opiši s njom oko B kružni luk. On neka siječe okomicu iz C u točki A. Tada je $CA = b$ stranica kvadrata, kome je ploština jednaka razlici ploština obadvaju zadanih kvadrata. Kako je naime kvadrat nad stranicom c jednak sumi kvadrata nad stranicama a i b, to je kvadrat nad b jednak razlici od ona druga dva.

Zadaća. Dužine kateta neka budu a (8 cm), b (15 cm); kolika je hipotenuza c?

Po poučku Pitagorinu mora da bude:

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}.$$

Pravilo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ dade se ovako izraziti: hipotenuza se proračuna, ako se kvadrati kateta zbroje i iz dobivena zbroja izvadi kvadratni korijen.

Zadaća. Zada se hipotenuza c (13 dm) i jedna kateta a (12 cm); kolika je kateta b?

Iz poučka Pitagorina slijedi:

$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}.$$

Pravilo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ može se ovako izraziti: kateta se proračuna, ako se od kvadrata hipotenuze odbije kvadrat druge katete i iz dobivene diferencije izvadi kvadratni korijen.

Primjeri: 1. Nacrtaj kvadrat, koji je dva puta veći od zadana kvadrata.

2. Nacrtaj kvadrat, koji je dva puta manji od zadana kvadrata. (Nacrtaj istokračan pravokutan trokut, komu je hipotenuza jednaka stranici zadana kvadrata.)

3. Nacrtaj kvadrat, komu je ploština 1 cm², 2 cm², 3 cm² ...

4. Nacrtaj kvadrate, kojima je ploština 20 cm² ($20 = 16 + 4$), 12 cm² ($12 = 16 - 4$), 19 cm² ($19 = 9 + 1$), 47 cm² ($47 = 49 - 1 - 1$).

5. Nacrtaj isto tako kvadrate, kojima je ploština 29 cm², 34 cm², 41 cm², 21 cm², 27 cm².

6. Nađi na taj način još nekoliko kvadrata, kojima se površina dade lako odrediti.

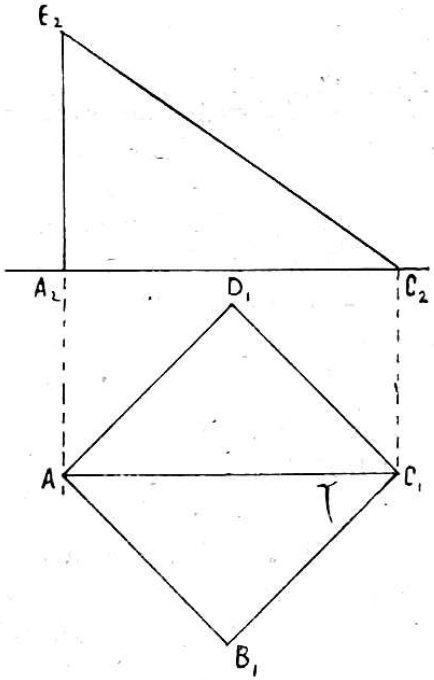
7. Stranice pravokutna trokuta sadržane su u skrižaljki:

	a	b	c
	9,	40,	41,
	11,	60,	61,
	12,	35,	37,
	21,	220,	221,
	24,	143,	145,
	40,	339,	401,
	44,	483,	485,

odredi iz dvije od njih treću.

8. Brod je od svjetionika A udaljen 8·5 Mm i hoće da prođe uza nj u udaljenosti od 4 Mm; koliko morskih milja prevali u 1 satu, ako je nakon $1^1/_4$ sata prošao mimo svjetionika?

9. Brod je plovio 13 sati u jednom kursu (u jednom pravcu) i prošao mimo svjetionika A u udaljenosti od 4·3 Mm; koliko je daleko bio od svjetionika na početku, ako je svaki sat prevalio 4·7 Mm?



Sl. 154.

10. Kolika je ploština pravokutnika, komu je dijagonala 101 cm, a jedna stranica 20 cm?

11. Nađi ploštinu istokračna trokuta, ako mu je baza 16 cm, a krak 65 cm.

12. Nađi ploštinu istostrana trokuta stranice 42 cm.

13. Nađi opseg romba, komu su dijagonale 30 cm i 16 cm.

14. Nađi visinu uspravne kvadratične piramide iz osnovnog brida $a = 4$ cm, i pobočnog brida $b = 6$ cm, konstrukcijom (tlocrt-nacrt) i računom.

15. Nađi isto tako konstrukcijom i računom visinu uspravna stošca polumjera $r = 3{\cdot}4$ cm, i stranice 5·6 cm.

16. Nađi dijagonalu kocke, kojoj je brid 54 dm. Uvjeri se o rezultatu računa konstrukcijom u 20 puta umanjenom mjerilu (slika 154.).

17. Nađi dijagonalu pravokutna paralelepipeda s dimenzijama 25 dm, 20 dm, 16 dm.

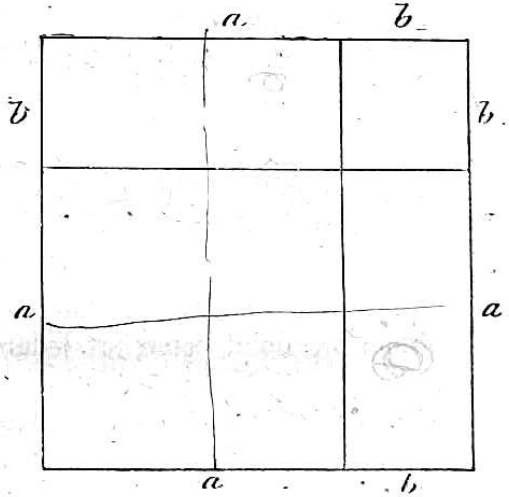
18. Koliko je daleko od središta tetiva, koja ima 6 cm, u krugu, komu je polumjer 4 cm?

19. Koliko je dugačka tetiva, koja je, u krugu s polumjerom od 3 cm, 2 cm daleko od središta?

Bilješka. U računima ove vrste neka se ne propusti rezultat računa potvrditi faktičkim mjerenjem, gdjegod je to samo moguće.

§ 45. Grafičko prikazivanje nekih aritmetičkih izraza.

1. Iz aritmetike je poznato, da nam je pravac najzgodnija slika, koja prikazuje red brojeva. Brojevi se na pravcu prikazuju tako, da se od početne točke, koja se obilježi sa „0“ (ništicom), jedna dužina po volji (= jedinica) nanosi redom.



Sl. 155.

Za takav pravac kažemo, da je slika reda brojeva, ili da nam on grafički prikazuje red prirodnih brojeva.

2. Ali ne samo da se pojedini brojevi dadu tako grafički prikazati, već se to može da učini i s rezultatima aritmetičkih operacija O tom, kako se grafički prikazuje suma i diferencija, bilo je govora, kad smo govorili o računanju s dužinama; a sada ćemo reći nešto o grafičkom prikazivanju produkata od dva faktora i kod toga geometrijski izvesti neke važne aritmetičke formule.

3. Povučemo li jednom točkom dijagonale kvadrata (sl. 155.) pravce, koji su s njegovim stranicama paralelni, nastaju dva kvadrata i dva kongruentna pravokutnika. Ploština kvadrata kao cjeline bit će $(a + b)^2$; ako pak promatramo pojedine dijelove

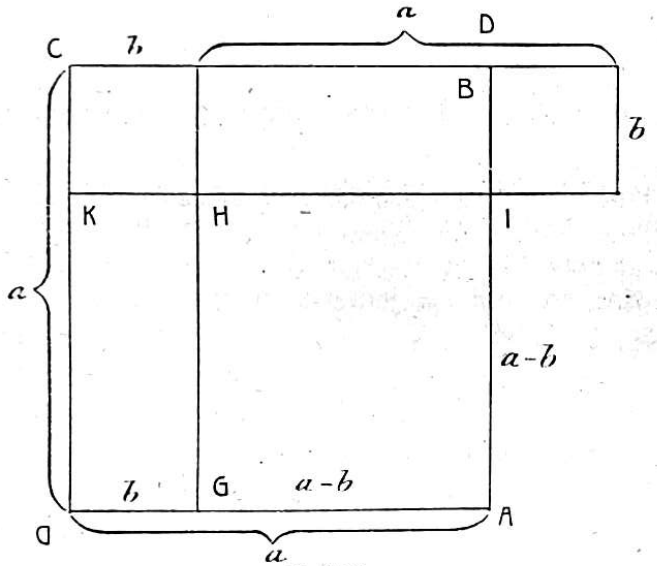
*

kvadrata i s pomoću njihovom odredimo ploštinu kvadrata, bit će ona a^2+b^2+2ab. Mora dakle da bude $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

4. Na sličan način dade se također dokazati i formula

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Nad dužinom a nacrtajmo kvadrat $ABCD$ (slika 156.). Od dužine a odbijmo dužinu b, i nad razlikom $(a-b)$ nacrtajmo kvadrat $AIHG$. Stranicu IH toga kvadrata produljimo dotle, dok ne siječe stranicu većeg kvadrata u točki K. Tim je



Sl. 156.

nastao paralelogram $IBCK$ sa ploštinom ab. Ako dodamo u lijevom vrhu još kvadrat sa ploštinom b^2, dobit ćemo još jedan pravokutnik sa ploštinom ab.

Čitav lik ima ploštinu a^2+b^2. Oduzmemo li od toga lika ona dva pravokutnika, preostat će nam kvadrat ploštine $(a-b)^2$. Dakle je:

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

5. Da dokažemo formulu $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, poslužit ćemo se slikom 157. Iz nje izlazi

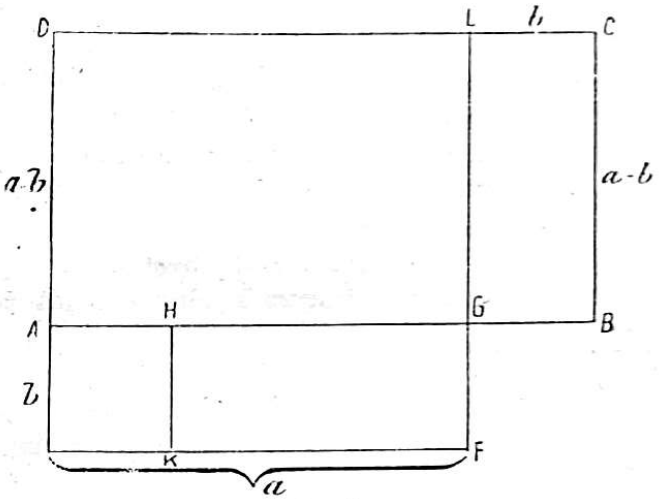
$$\begin{aligned} EFLD-AEKH &= AGLD+FGHK \\ &= AGLD+BCLG \\ &= ABCD, \text{ t. j.} \\ a^2-b^2 &= (a+b)(a-b), \end{aligned}$$

jer su stranice pravokutniku $ABCD$: $(a+b)$ i $(a-b)$.

Historijska bilješka. Takovo prikazivanje rezultata aritmetičkih s pomoću geometrijskih likova vrlo je staro. Stari grčki matematici služili su se isključivo njime, kad su raspravljali aritmetička pitanja, a činili su to zato, što je njihov sistem numeriranja bio težak i za računanje nepodesan, a o općoj aritmetici nije još tada bilo govora.

U elementima Euklidovim ima zato obilje primjera.

Kad su stari grčki matematici htjeli riješiti na pr. jednadžbu $5x=20$, onda su oni tu zadaću zaodjeli u geometrijsko ruho



Sl. 157.

i govorili: u pravokutniku, kome je ploština 20 jedinica ploštine, ima se naći druga stranica, ako prva ima 5 jedinica dužine.

Primjeri. Prikaži grafički izraze:

1. $ab+ac=a(b+c)$
2. $ab-ac=a(b-c)$
3. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$
4. $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$
5. $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$
6. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b)^2$
7. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

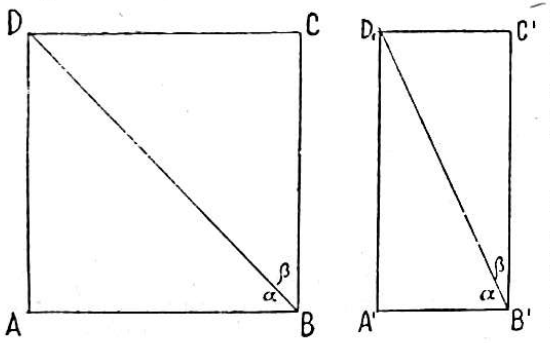
VIII. Sličnost trokuta.

§ 46. Pojam sličnosti.

1. U školi se imala riješiti ova zadaća: nacrtati kvadrat s bilo kakovom stranicom. Svaki je učenik tu zadaću riješio u bilješkama svojim, a jedan ju je riješio na školskoj ploči. Što se može kazati o tako dobivenim kvadratima? Svi jamačno nijesu kongruentni, a po gotovo s kvadratom na tabli ne će biti ni jedan kongruentan. Ako i ne pripada svim tim kvadratima oznaka kongruencije, može se ipak jedna oznaka naći, koja im pripada svima, i s kojom možemo sve te likove opisati. To se u nauci o prostoru čini oznakom sličan. Svi su dakle kvadrati slični, svi imadu isti oblik; razlikuju se po veličini i položaju.

2. Svi vi već i iz običnog govora poznate riječ „sličan", a znate joj približno i značenje; naša je zadaća ovdje, da ispitamo, koje oznake mora da imaju dva lika, za koja kažemo, da su slična.

3. Vratimo se k našim kvadratima. Svak će lako priznati, da je kvadrat sličan svakom drugom kvadratu, a još će lakše priznati, da kvadrat ne može da bude ni u kojem slučaju sličan kojem trokutu ili peterokutu i t. d.



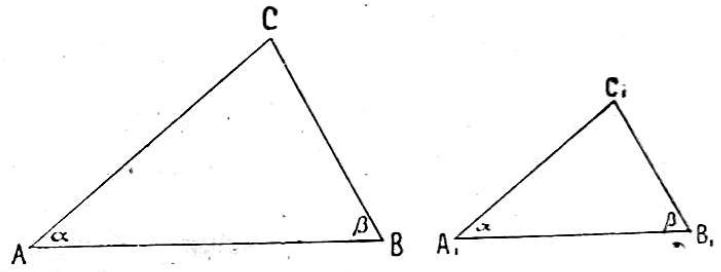
Sl. 158.

Da dva lika budu dakle slična, nužno je prije svega, da svakoj točki i svakoj dužini jednoga odgovara u drugom liku jedna točka i jedna dužina. Dakle slični mogu da budu trokut trokutu, četverokut četverokutu i t. d. Za točke i dužine, koje u dva lika jedna drugoj odgovaraju, kažemo u nauci o prostoru, da su homologne.

4. Svi oni kvadrati, o kojima je prije bilo govora, podudaraju se jedino u kutovima, i baš u toj jednakosti kutova leži glavna oznaka sličnosti. Dva slična lika mora da imaju jednake homologne kutove.

5. No i to još nije sve. Pravokutnik i kvadrat imaju jednake homologne kutove, pa ćeš ipak već na prvi mah vidjeti, da oni

nijesu slični (slika 158.). Ali, ako u ta dva lika povučemo još i jednu dijagonalu, onda lako vidimo, da u njima nijesu svi homologni kutovi jednaki, jer kutovi α i β nijesu jednaki s kutovima α' i β'. Da ispitamo dakle, jesu li dva lika slična ili nijesu, morale bi se povući sve homologne dužine i onda istražiti, jesu li svi tako nastali kutovi jednaki. No takovo mjerenje kutova i precrtavanje s pomoću samih kutova prilično je nezgodno, zato se naročito kod precrtavanja postupa drugčije, na što ćemo odmah doći; a sada moramo najprije da utvrdimo i upamtimo jednu važnu istinu, do koje smo došli.



Sl. 159.

6. U trokutu su stranice jedine dužine, koje mogu spajati vrhove, pa će dakle vrijediti ova istina:

Dva su trokuta slična, ako imadu homologne kutove jednake.

No budući da je u trokutu treći kut određen, ako su mu zadana dva, dovoljno je, da u dva trokuta nađemo dva para homolognih i jednakih kutova, pa da ustvrdimo, da su oni slični (slika 159.).

7. Svaki se mnogokut može dijagonalama podijeliti na same trokute; ako su sada dva mnogokuta slična, onda ih homologne dijagonale dijele u slične trokute (slika 160.).

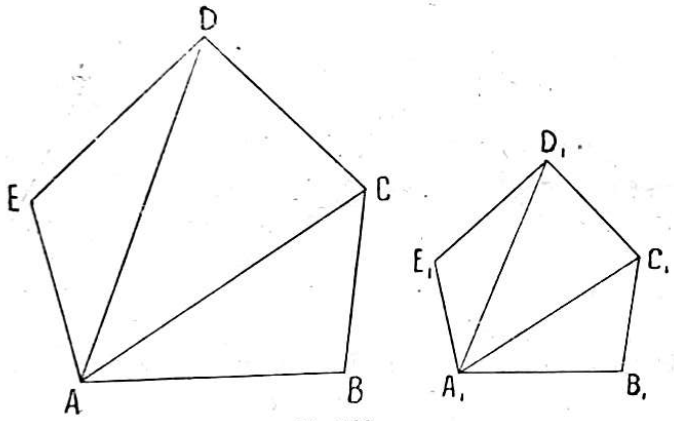
U pravilnim poligonima s jednakim brojem stranica svi su kutovi jednaki, prema tomu su pravilni mnogokuti s jednakim brojem stranica slični.

Već smo prije jednom spomenuli, da smijemo krug smatrati pravilnim poligonom s veoma velikim brojem stranica; iz toga slijedi:

Krugovi su slični likovi.

§ 47. Crtanje u umanjenom (uvećanom) mjerilu.

1. Kada sa table precrtavaš koji lik, nastojiš i nehotice, da lik u tvojoj bilježnici bude sličan liku, koji je na tabli nacrtan, i ako je on manji od lika na tabli. No da lik u tvojoj bilježnici bude doista i sličan liku na tabli, moraš postupati po nekom propisu, koji ćemo sada opisati. Neka je na tabli nacrtan pravokutnik sa stranicama 6 dm i 4 dm. Da u bilježnici dobiješ pravokutnik sličan s onim na tabli, uzet ćeš za dužine stranica 6 cm i 4 cm. Stranice pravokutnika u bilježnici manje su 10 puta od stanica pravokutnika na tabli, ili ti si nacrtao lik u 10 puta uma-



Sl. 160.

njenu mjerilu, ili, kako se to običaje pisati, u mjerilu 1 : 10. Svaka stranica i svaka dijagonala pravokutnika u bilješci 10 puta je manja od homologne stranice i dijagonale pravokutnika na tabli.

Kad bi bio nacrtan pravokutnik sa stranicama od 3 cm i 2 cm, dobio bi bio i opet pravokutnik sličan onomu na tabli, ali umanjen u mjerilu 1 : 20.

2. Crtanjem u umanjenom mjerilu poslužili smo se već u ovoj knjizi na više mjesta. Tako, kada smo govorili o predočivanju tjelesa s pomoću tlocrta i nacrta; ili, kada smo govorili o tom, kako se može s pomoću koordinata nacrtati omanje koje zemljište. Vidi §§ 32.—35., 41. u ovoj knjizi.

Kako se zadani lik može umanjiti, može se on i uvećati, tada kažemo, da je lik nacrtan u uvećanom mjerilu.

3. Iz crtanja u umanjenom ili uvećanom mjerilu možemo da naučimo još jednu oznaku, koju imaju slični likovi. Stranice i dijagonale pravokutnika u tvojoj bilježnici označi redom sa AB, BC, AC, BD; a stranice i dijagonale pravokutnika na tabli označit ćemo sa $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$, $B'D'$. Sada si crtao tako, da bude $AB = \frac{1}{10} A'B'$; $BC = \frac{1}{10} B'C'$; a mjerenjem se možeš lako uvjeriti, da je i $AC = \frac{1}{10} A'C'$ i $BD = \frac{1}{10} B'D'$. Svaki dakle par homologne dužine kod sličnih likova stoji u istom omjeru. A dva para veličina ili njih više, koji imadu isti omjer, čine razmjer ili proporciju. Za one dvije veličine, koje dolaze u svakom paru, kažemo pak, da su razmjerne ili proporcionalne. Dakle su u sličnim likovima homologne dužine proporcionalne. Uzevši sve u jedno možemo oznake sličnih likova opisati ovako:

U sličnim su likovima homologni kutovi jednaki, a homologne dužine proporcionalne.

Bilješka. Označimo veličinu bilo koje dužine u precrtanom liku sa y, veličinu njoj homologne dužine u prvobitnom liku sa x, a mjerilo sa k, vidimo iz gornjega, da je sa

$$y = k\,x$$

označena proporcionalnost između dužina y i x, kako je to već prije jednom rečeno bilo. Vidi § 40. k je konstantan neimenovan broj, on nam označuje mjerilo; naprotiv se veličine x i y mijenjaju, to su naime parovi homolognih dužina u sličnim likovima, a tih možemo nacrtati, kolikogod hoćemo. Ali, ako je jedamput zadano mjerilo k, možemo svakoj dužini x u jednom liku naći homolognu dužinu u drugom. Veličina dužine jednog lika jest dakle funkcija veličine homogene dužine drugog lika.

Ako je broj k pravi razlomak, onda su dužine y manje od dužina x; lik s dužinama y nacrtan je u umanjenom mjerilu. Ako je pak k nepravi razlomak (i cio broj), onda su dužine y veće od dužina x; lik s dužinama y nacrtan je u uvećanom mjerilu. Konačno, kada je $k = 1$, oba su lika kongruentna.

Primjeri: 1. Izmjeri dimenzije stola, prozora, vrata, stijena i drugih likova, i nacrtaj ih u umanjenom mjerilu (na pr. 1 : 50).

2. Nacrtaj bilo kakav peterokut, pa mu stranice *a)* 2 puta umanji; *b)* 2 puta uvećaj.

3. Zada se pravilna šesterostrana prizma s osnovnim bridom od 6 dm i pobočnim bridom od 12 dm; nacrtaj joj tlocrt i nacrt u umanjenom mjerilu 1 : 30.

4. Pravilna četverostrana piramida s osnovnim bridom od 6 dm i pobočnim bridom od 1 m ima se nacrtati u tlocrtu i nacrtu u umanjenom mjerilu 1 : 20.

5. Pravilna četverostrana piramida predočena je tlocrtom i nacrtom u umanjenom mjerilu 1 : 15. Stranica tlocrtnog kvadrata ima 3 cm, a visina u nacrtu ima 5 cm. Nacrtaj lik i odredi, koliki su osnovni i pobočni bridovi zadane piramide.

6. Nacrtaj trapez, komu su paralelne stranice 8 cm i 6 cm, a krakovi 6 cm i 5 cm, u umanjenom mjerilu 3 : 5.

7. Nacrtaj istokračan trapez s paralelnim stranicama 9 cm i 6 cm i krakom od 3 cm, u umanjenom mjerilu 2 : 3.

8. U četverokutu zada se stranica 4 dm i dvije dijagonale 6 dm i 7 dm kao i dva kuta, koja su uz onu stranicu 80^0 i 70^0. Veći kut leži nasuprot većoj dijagonali. Nacrtaj lik 10 puta umanjen.

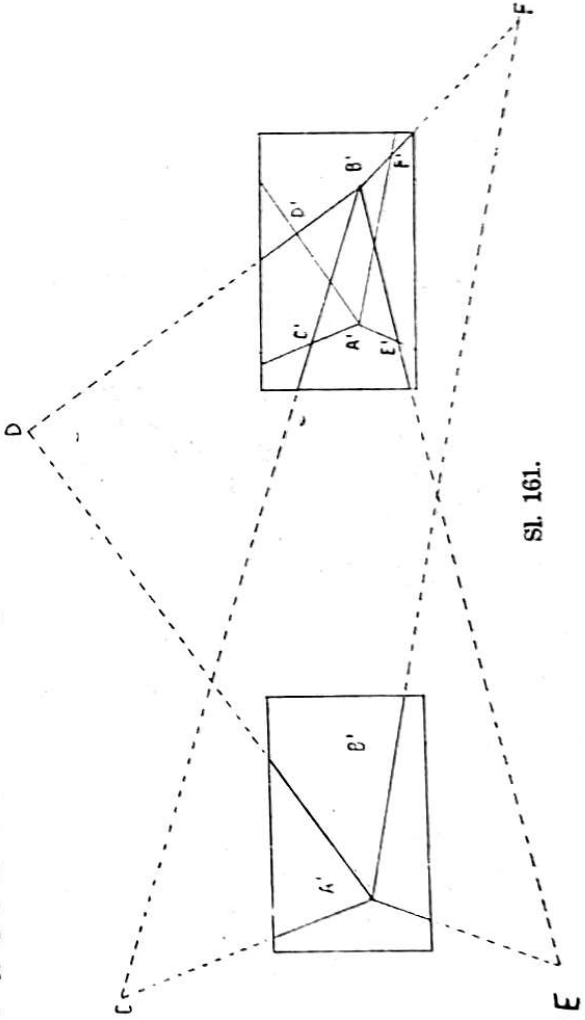
9. Kolike su stranice romba, koji je zadan u 5 puta umanjenom mjerilu s dijagonalama 4 cm i 6 cm?

10. Kako se crta plan horizontalna zemljišta? Na tlu zemljišta odaberu se dvije točke A i B i označe se (štapovima), tim se izmjeri dužina AB i unese u kartu u umanjenu mjerilu kao $A'B'$. Karta se pričvrsti na ravan stol, koji se kod crtanja ima uvijek da drži horizontalno. S kartom na stolu idemo ponajprije na mjesto A i stol smjestimo tako, da točka A' dođe vertikalno povrh A. Sada gledamo iz točke A' prema točki B i stol okrećemo dotle, dok $A'B'$ ne padne točno u smjer AB. Sada gledamo iz točke A' na druge točke zemljišta C, D, E, F (slika 161.) i s pomoću čavlića, koji se zataknu u papir, nacrtamo na karti smjerove $A'C'$, $A'D$ i t. d. Nakon toga odnesemo stol na mjesto B i postavimo ga tako, da točka B' dođe vertikalno povrh B, a pravac $B'A'$ da dođe u smjer BA. Sada opet na papiru nacrtamo smjerove $B'C', B'D$ i t. d. Točke $C', D', E' F'$, u kojima se sijeku zrake $A'C, A'D$ i t. d. sa zrakama $B'C, B'D$ i t. d. na karti, jesu točke, koje na planu predočuju točke zemljišta C, D, E, F. Plan je sličan nacrtanom zemljištu, jer oba sastoje od sličnih trokuta. S pomoću takova plana nađemo daljinu dviju točaka u prirodi EF, do kojih kadikad i ne

možemo da dođemo, ako na karti izmjerimo $E'F'$ i dobivenu dužinu pomnožimo s brojem n, ako nam $1 : n$ označuje mjerilo karte.

§ 48. Konstruiranje sličnih likova.

1. Kad smo imali zadanome liku konstruirati lik sličan, morali smo znati mjerne brojeve dužina zadana lika, koje smo onda množenjem sa zadanim mjerilom k aritmetički umanjili ili uvećali, već kako je bilo k manje ili veće od 1. Sada ćemo pokazati, kako se čisto konstruktivnim putem dade zadanom liku nacrtati drugi, koji će mu biti sličan.



Sl. 161.

2. Neka je zadan peterokut $ABCDE$. Da konstruiramo drugi peterokut, prvomu sličan, uzmimo bilo gdje u ravnini točku S (slika 162.). Iz te točke povucimo zrake, koje idu vrhovima zadana peterokuta i presjecimo ih paralelnim pravcima. Dobiveni peterokut $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ sličan je sa zadanim, jer se oba, kako se lako iz slike vidi, sastoje iz samih sličnih trokuta.

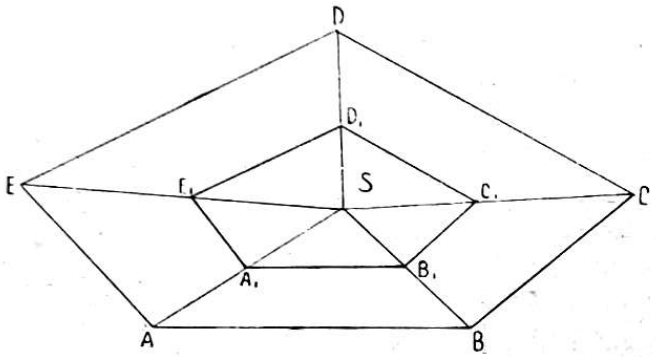
Točka S ne mora biti unutar mnogokuta, ona može da leži i vani (slika 163., 164.).

3. Tako nacrtana dva slična mnogokuta imaju i jedan osobit položaj, koji je u tome, da su homologne stranice para-

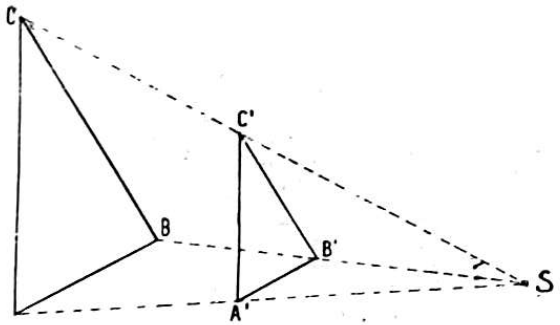
paralelne, a homologni vrhovi da leže na istoj zraki jednog pramena.

Takav se položaj u nauci o prostoru zove perspektivni položaj, a točka S zove se središte sličnosti.

4. Želimo li zadanom peterokutu u slici 162. nacrtati ne samo lik sličan, već i u određenom mjerilu umanjen ili uvećan, onda se i to može. Ako je na primjer mjerilo, u kom se peterokut ima umanjiti, 1 : 2, onda ćemo dužinu SA_1 uzeti dva puta manju od SA i postupati kao prije, i uvjeriti se, da će i sve druge dužine biti umanjene u tom istom mjerilu; a u tom mjerilu bit će umanjen i čitav opseg mnogokuta, koji je zadanome sličan. Ako je zadan mjerni broj opsega prvobitnog mnogokuta, onda su time određeni i opsezi svih mnogokuta, koji su mu slični; svi su ti opsezi funkcije mjerila.



Sl. 162.

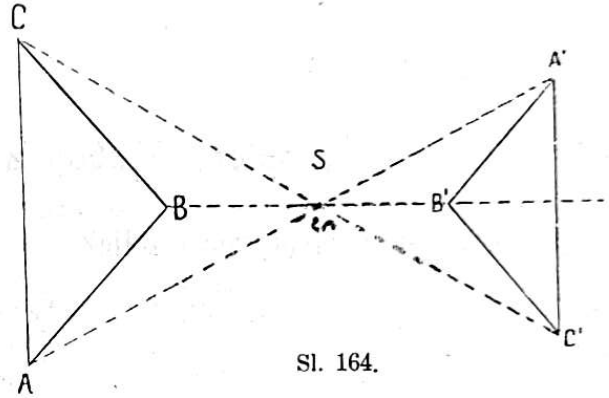


Sl. 163.

5. A što je sa plošinama sličnih mnogokuta? I na to pitanje dade se u nekim slučajevima lako odgovoriti.

Uzmimo, da nam je zadan kvadrat i pravokutnik s kakim bilo stranicama. Tome kvadratu i pravokutniku nacrtat ćemo sličan kvadrat i pravokutnik, umanjen u omjeru 1 : 4 i to tako, da središte sličnosti dođe u vrh A (slika 165., 166.).

Iz slike se sada vidi, da je ploština zadana kvadrata i pravokutnika 16 puta veća od ploštine umanjena kvadrata dotično pravokutnika. Pošto se pak svaki lik dade rastaviti na trokute, a trokuti se dadu lako pretvoriti u pravokutnike, to će i ploština svakoga lika biti 16 puta veća od ploštine njemu slična lika, ali umanjena u omjeru 1 : 4.



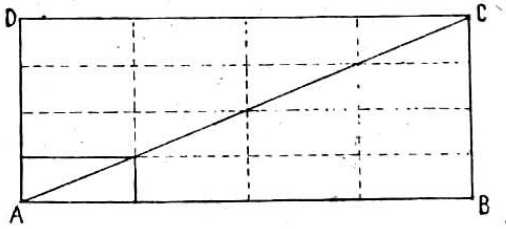
Sl. 164.

6. Nacrtaj i opet bilo kakov kvadrat i pravokutnik i nacrtaj mu lik sličan, ali umanjen u mjerilu 1 : 2.

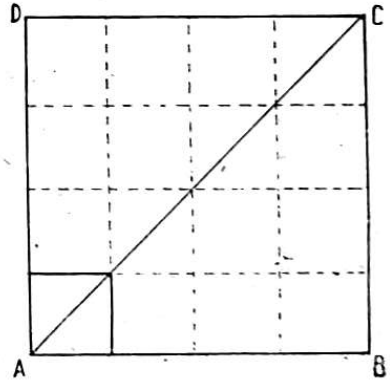
Pokušaj to isto za mjerila 1 : 3 i 1 : 5. Stranice možeš odabrati tako, da ih bude lako dijeliti na 3 i na 5 dijelova.

Kaži sada, koliko je puta manja ploština lika 3 puta, 5 puta i t. d. umanjena?

Bilješka. Slike 162.—164. možemo i tako shvatiti, kao da one predočuju prostorne likove, na primjer piramidu s vrhom u S i prerezom paralelnim s bazom. Ako piramidu prerežemo paralelno s bazom, dobit ćemo lik sličan bazi. Ili ako je S svijetla točka, to će trokut $A_1 B_1 C_1$ (slika 162.) na ravnini paralelnoj s ravninom trokuta $A_1 B_1 C_1$ dati sjenu $A B C$.



Sl. 165.



Sl. 166.

Primjeri: 1. Nacrtaj peterokut kakav bilo; nacrtaj tome peterokutu sličan, ako je središte sličnosti *a)* na jednoj njegovoj stranici, *b)* u jednom njegovu vrhu.

2 Nacrtaj tako isto bilo kakov mnogokut i njemu sličan *a)* dva puta umanjen; *b)* dva puta uvećan.

3. Mjerenje visine s pomoću sjene. Vertikalni štap visok 3 m baca sjenu dugačku 2 m. U isto vrijeme baca jedno drvo sjenu 8 m dugačku. Koliko je visoko drvo?

IX. Izračunavanje oplošja i obujma.

§ 49. Uspravna prizma i valjak.

1. Naći oplošje prizme i valjka znači naći ploštinu mrežâ tih tjelesa. A mreža njihova sastavljena je, kako je to bilo pokazano u §§ 32., 33., iz dvije baze i pobočne plohe. Ako dakle sa B označimo mjerni broj ploštine baze, a sa P mjerni broj ploštine pobočne plohe, dobit ćemo mjerni broj za oplošje O prema formuli:

$$O = 2B + P$$

2. Pobočna ploha kod uspravne prizme i uspravna valjka ima oblik pravokutnika, komu je osnovica opseg baze o, a visina mu je visina prizme ili valjka v. Prema tomu će biti formula za oplošje prizme ova:

$$O = 2B + ov$$

ako na mjesto P pišemo ov.

Primjer. Neka je zadana pravilna četverostrana prizma s osnovnim bridom $a = 4$ dm, i pobočnim bridom $b = 6$ dm; ploština bazâ su dva kvadrata, dakle će biti $2B = 2a^2 = 32$ dm^2; opseg baze je $4a = 16$ dm, a visina prizme v jednaka je pobočnom bridu b, pa će zato biti pobočje $P = 4ab = 96$ dm^2. Račun dakle teče po ovom obrascu:

$$O = 2B + P = 2a^2 + 4ab =$$
$$= 32 \text{ dm}^2 + 96 \text{ dm}^2 = 128 \text{ dm}^2.$$

Ako broj $3\frac{1}{7}$ označimo sa π, polumjer baze valjka sa r, a visinu sa v, dobit ćemo kod valjka za ploštinu baze $r^2\pi$, a za ploštinu pobočne plohe $2r\pi \,.\, v$, prema tomu bit će oplošje valjka

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi \,.\, v = 2r\pi\,(r + v)$$

Primjer. Neka je polumjer baze valjka $r = 2$ dm, visina $v = 4$ dm; bit će mu oplošje

$$O = 4\pi\,(2 + 4) \text{ dm}^2 = 4\pi.\ 6 \text{ dm}^2 = 24\pi \text{ dm}^2 = 75\tfrac{3}{7} \text{ dm}^2.$$

3. Da odredimo obujam prizme ili valjka, postupat ćemo onako, kako smo postupali kod izračunavanja obujma pravokutnog paralelepipeda, koji i onako nije drugo, nego uspravna prizma.

Uzmimo, da smo za jedinicu obujma odabrali cm^3, to jest, da su nam bridovi prizme zadani u centimetrima.

Odrežimo sada od prizme ili valjka povrh baze i paralelno s njom jednu vrstu visoku 1 cm, to će sada nad svakim kvadratnim centimetrom baze stojati 1 cm^3. Ta vrsta ima dakle isto toliko cm^3, koliko baza ima cm^2. Ako je visina prizme ili valjka v cm, to će takovo tijelo sadržavati v takovih vrstâ. Prema tomu će mjerni broj za obujam prizme ili valjka biti jednak produktu mjernog broja za ploštinu baze i mjernog broja visine.

Ako je visina v razlomak, vrijedi to pravilo i onda, kako ćemo niže pokazati na jednom primjeru.

Imamo dakle za obujam V uspravne prizme formulu $\boldsymbol{V = B.\ v}$

a za valjak formulu $\boldsymbol{V = r^2\pi v}$

Primjeri: 1. Osnovni je brid prizme $a = 4$ m, a visina 5·3 m; obujam u dm^3:

$$V = B.\ v = 1600.\ 53 \text{ dm}^3 = 84800 \text{ dm}^3 = 84.8 \text{ m}^3.$$

2. Polumjer baze valjka $r = 2$ cm, visina $v = 6$ cm; obujam tog valjka bit će

$$V = r^2\pi.\ v = 4.\ \pi\ 6 = 24.\ \tfrac{22}{7} = 75\tfrac{3}{7} \text{ cm}^3.$$

4. Iz gornjih formula izlazi i za **pravokutni paralelepiped,** s dimenzijama a, b, c, formula za oplošje:

$$O = 2\,(ab + ac + bc)$$

a za obujam $V = abc$

5. Za **kocku** brida a imat ćemo

$$O = 6a^2 \qquad V = a^3$$

Odatle pak lako slijedi, da ćemo iz oplošja O dobiti brid kocke po jednadžbi: $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

a iz obujma V po jednadžbi: $a = \sqrt[3]{V}$

6. Ako se kod prizme i valjka mijenjaju osnovni i pobočni bridovi, dotično polumjer baze i visina, mijenja se također njihovo oplošje i obujam. Ove potonje veličine jesu funkcije onih prvih.

Istražuj, kako se mijenja oplošje i obujam valjka, ako polumjer baze ili visina ili oboje zajedno biva dva, tri i t. d. puta veće!

Primjeri: 1. Izračunaj oplošje i obujam kocke brida 1. $a = 3{\cdot}2$ m; 2. $a = 4{\cdot}5$ m; 3. $a = 7{\cdot}5$ m.

2. Kolik je brid kocke, kojoj je oplošje 1. $O = 6144$ cm^2; 2. $O = 4704$ cm^2; 3. $O = 25350$ cm^2?

3. Kolik je brid kocke, kojoj je obujam 1. $V = 1{\cdot}728$ m^3; 2. $V = 15{\cdot}725$ m^3; 3. $V = 19{\cdot}683$ m^3?

4. Izračunaj oplošje i obujam uspravne kvadratične prizme s osnovnim bridom $a = 26{\cdot}2$ cm i pobočnim bridom $b = 35{\cdot}5$ cm.

5. Koliko je kg težak kvadratični stup od mramora, ako mu je osnovni brid 32 cm, a pobočni 4·75 m dug i ako cm^3 mramora teži 2·72 gr?

6. Izračunaj oplošje i obujam pravilne trostrane prizme s osnovnim bridom 3 dm i pobočnim bridom 6 dm. Predoči tu prizmu tlocrtom i nacrtom u 10 puta umanjenom mjerilu.

7. Izračunaj oplošje i obujam pravilne šesterostrane prizme s osnovnim bridom 3 dm i visinom 5 dm. Predoči tu prizmu tlocrtom i nacrtom u 10 puta umanjenom mjerilu.

8. Šesterostrani stup od hrastovine ima osnovni brid 16 cm, a visinu 4·8 m. Koliko stoji taj stup, ako se za 1 m^3 obrađena drva plati 130 K?

9. Željeznički nasip visok 4·85 m jest gore 6·25 m, a dolje 7·75 m širok; koliko je m^3 zemlje bilo nužno za prugu toga nasipa dugačku 25 m? (Prizma, kojoj je baza trapez.)

10. Baza uspravna valjka visine 15 cm ima polumjer 35 cm; koliko je oplošje i obujam valjka. Predoči taj valjak tlocrtom i nacrtom u 5 puta umanjenom mjerilu.

11. Prerez po osi valjka je kvadrat plošnine 625 mm^2. Koliko je oplošje i obujam toga valjka. Predoči ga tlocrtom i nacrtom u pravoj veličini.

12. Koliko litara vode može da drži cilindrička (cilindar = valjak) cijev dugačka 3·25 m, koja je iz nutra široka 42 cm?

13. Koliko kg žive treba da se napuni stakleni valjak dugačak 28 cm, koji je iznutra širok 12 cm; ako cm^3 žive teži 13·6 gr?

14. Koliko je težak željezni valjak dugačak 5·6 m, ako mu je polumjer baze 0·2 m i ako cm^3 željeza teži 7·4 gr?

15. Koliko je kg teška masivna brončana figura, ako se voda u valjku širokom 0·56 m digne za 0·9 m, kada figuru spustimo u vodu?

16. Ako u posudu, koja ima oblik valjka, nalijemo 1·925 l vode, to ona stoji 12·5 cm visoko. Kolika je baza valjka, a kolika je cjelokupna ploha, koja je u dodiru s vodom?

§ 50. Uspravna piramida i stožac.

1. Oplošje bilo koje piramide dade se odrediti, ako izmjerimo na piramidi dužine, koje su nužne za izračunavanje ploština i ako ploštine izračunamo po pravilima, o kojima je bilo govora na drugom mjestu ove knjige.

2. Kod pravilne piramide posao je taj toliko lakši, što je pobočna ploha njena sastavljena od samih kongruentnih istokračnih trokuta, pa je dovoljno, da izračunamo ploštinu jednoga od njih i tu ploštinu pomnožimo s brojem strana piramide, da dobijemo ploštinu pobočne plohe. Ako toj ploštini pribrojimo još ploštinu baze, dobit ćemo čitavo oplošje piramide.

3. Kod uspravna stošca sastavljeno je oplošje, kako se vidi iz njegove mreže, od ploštine kruga i ploštine kružnog isječka, kome je luk jednak opsegu onoga kruga, a polumjer mu je jednak stranici stošca. Prema tomu će biti oplošje stošca zadano formulom:

$$O = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s)$$

4. Obujam piramide i stošca nađe se, ako se baza pomnoži sa visinom i dobiveni produkt razdijeli sa 3. Prema tomu možemo pisati formulu za obujam piramide i stošca u obliku:

$$V = \tfrac{1}{3} B.v$$

a za stožac još napose

$$V = \tfrac{1}{3} r^2\pi v$$

I kod piramide i stošca jesu oplošje i obujam funkcije veličina, iz kojih se dadu izračunati. Ispituj dotične funkcije.

Bilješka. Formule za obujam piramide i stošca, kao i formule za oplošje i obujam kugle, o kojima će kasnije biti govora, dadu se izvesti također računom, koji ovdje možemo da izostavimo. Kad bismo imali piramidu i prizmu, dotično stožac i valjak, napravljene od iste tvari, s jednakim bazama i jednakim visinama, mogli bismo vaganjem pokazati, da bi piramida i stožac bili tri puta lakši od prizme i valjka.

Primjeri: 1. Toranj se svršava s kvadratičnom piramidom. Opseg njene baze ima 32 m, a pobočna visina (t. j. visina jednoga od pobočnih trokuta) 5·75 m. Koliko stoji pokrivanje piramide, ako se za m^2 plaća 8·5 K?

2. Izračunaj oplošje i obujam kvadratične piramide, kojoj je osnovni brid 3 dm, a pobočni 5 dm. Predoči tu piramidu tlocrtom i nacrtom u 10 puta umanjenu mjerilu i isporedi veličinu visine, koju dobiješ konstrukcijom s rezultatom računa; to isto učini i za pobočnu visinu.

3. Nađi oplošje i obujam pravilnog tetraedra brida 4 cm. Predoči ga tlocrtom i nacrtom i isporedi veličine dobivene konstrukcijom s rezultatom računa.

4. Nađi oplošje i obujam pravilne šesterostrane piramide s osnovnim bridom 2 dm i pobočnim bridom 5 dm. Predoči je tlocrtom i nacrtom i isporedi veličine dobivene konstrukcijom s rezultatom računa.

5. Koliko teži trostrana pravilna piramida od kamena s osnovnim bridom $a = 25$ cm i visinom $v = 2{\cdot}7$ m, ako cm^3 kamena teži 2·4 gr?

6. U uspravnom stošcu je polumjer baze $r = 5$ cm, a visina $v = 12$ cm. Koliko je oplošje i obujam?

7. U uspravnom stošcu je polumjer baze $r = 12$ cm, a stranica $s = 37$ cm. Koliko je oplošje i obujam?

8. U uspravnom stošcu je stranica $s = 17$ cm i visina $v = 15$ cm. Koliko je oplošje i obujam?

9. Stožac od šećera teži 6·237 kg; opseg baze ima 66 cm, a stranica 37·5 cm. Koliko gr teži cm^3 šećera (specifična težina šećera)?

10. Prerez po osi uspravna stošca je istokračan trokut s bazom od 4 dm i krakom od 6 dm; nađi oplošje i obujam.

Predoči stožac tlocrtom i nacrtom i isporedi veličine dobivene konstrukcijom s rezultatom računa (visinu).

11. Prerez po osi uspravna stošca je istostran trokut stranice 4 dm. Nađi oplošje i obujam. Konstruiraj visinu stošca i isporedi je s rezultatom računa.

§ 51. Kugla.

1. I ako se mreža kugle ne dâ konstruirati, ipak joj se dade oplošje izračunati na način, o kom ovdje ne ćemo govoriti, po formuli

$$O = 4r^2\pi$$

ako sa r označimo mjerni broj polumjera kugle.

Obrnuto dobit će se r iz O po formuli

$$= \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$$

2. Obujam kugle računa se po formuli

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Iz volumena V dobije se polumjer r po formuli:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

3. I oplošje i obujam kugle jesu funkcije njena polumjera r. Ispituj, koliko će se puta uvećati oplošje i obujam, ako polumjer biva 2, 3, 4 i t. d. puta veći.

Primjeri: 1. Izračunaj oplošje i obujam kugle polumjera $r = 20$ cm (25 cm, 60 cm . . .).

2. Pozlaćivanje jedne kugle stoji 14784 K, ako se za m^2 plaća 96 K. Kolik je polumjer kugle?

3. Koliko je teška kugla od mesinga, kojoj je polumjer 6 cm, ako cm^3 mesinga teži 8·4 gr?

4. Kugla od olova teži 50 gr. Kolik joj je polumjer, ako cm^3 olova teži 11·4 gr?

5. Zemlja ima od prilike oblik kugle, kojoj je polumjer $r = 6.370$ km. Koliko joj je oplošje i obujam?

6. Ako iz olovne kugle polumjera 5 cm prelijevanjem dobijemo 10 manjih jednakih kuglâ, koli kće im biti polumjer, i kako se promijenilo oplošje.

7. Ako je dijametar sunca 108 puta veći od dijametra zemlje, koliko je puta obujam sunca veći od obujma zemlje?

8. Kupula jedne crkve ima oblik polukugle i predočena je tlocrtom i nacrtom u mjerilu 1 : 125. Opseg tlocrta ima 19 cm. Sastavi sliku i odredi oplošje kupule.